例題

経済動学 2017q1

mail@**kenjisato**.jp

問題

Gary Hansen (1985) による RBC モデルの決定論バージョンをシミュレーションせよ．記号法やパラメータは Miao (pp. 26–31) を参考にしている．モデル:

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\log C_t + \chi \log(1 - N_t)\right] \\
&\text{subject to} \\
&\qquad C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \qquad (1)\\
&\qquad \log z_{t+1} = \rho \log z_t + e_t \qquad (2)\\
&\qquad K_0, z_0 : \text{ given.}
\end{aligned}
$$

Klein の手法で分析可能な線形方程式を作るためには, 次のステップを実行すればよい.

[1．手計算]　Lagrange 関数を作り, 均衡経路 $\{(C_t, N_t, K_t)\}_{t=0}^{\infty}$ が満たすべき条件 (1 階条件) を求めよ.

[2．数値計算]　$e_t \equiv 0$ として, [1] で得た 1 階条件を満たす定常状態 $(\bar{C}, \bar{N}, \bar{K})$ および, $\bar{z}$ を求めよ．ただし, パラメータは次のように与える:

$$
\alpha = 0.33, \quad \beta = 0.99, \quad \delta = 0.023
$$
$$
\chi = 1.75, \quad \rho = 0.95.
$$

[3．数値計算 or シンボリック計算 or 手計算]　[1] で得た 1 階条件を [2] で得た定常状態の周りで線形化 (あるいは対数線形化) し, 線形システム方程式を導出せよ．線形化に必要な微分を行うには数値微分を用いる方法と, シンボリック計算あるいは手計算による方法がある．いずれを用いてもよい．

[4．数値計算]　[3] で得た線形システムに Klein の方法を適用する．ただし, 外生変数 e を次のようにおく．

$$
e_0 = 0,\ e_1 = 0.01,\ \ldots,\ e_{10} = 0.01,\ e_{11} = 0,\ e_{12} = 0,\ \ldots
$$

このとき, C_t, N_t, K_t, z_t の時間発展をシミュレーションせよ．

解説

1. FoC の導出　Lagrange 関数

$$
\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \Big\{ \beta^t \left[\log C_t + \chi \log(1 - N_t) \right] - \lambda_t \left(C_t + K_{t+1} - (1-\delta) K_t - z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \right) \\
- \mu_t \left(\log z_{t+1} - \rho \log z_t - e_t \right) \Big\}.
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \beta^t \left[\frac{1}{C_t} - \lambda_t \right] = 0 \Longleftrightarrow \lambda_t = \frac{1}{C_t}. \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} &= -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} \left[(1-\delta) + \alpha z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} \right] = 0, \\
\Longleftrightarrow \lambda_t &= \beta \lambda_{t+1} \left[(1-\delta) + \alpha z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} \right].
\end{aligned}
$$

式 (3) より,

$$
C_{t+1} = \beta C_t \left[1 - \delta + \alpha z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} \right]. \tag{4}
$$

N について偏微分すると.

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = \beta^t \left[\left(-\frac{\chi}{1 - N_t} \right) + (1-\alpha) \lambda_t z_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} \right] = 0,
$$

すなわち,

$$
\chi C_t = (1-\alpha) z_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} (1 - N_t). \tag{5}
$$

均衡条件は, (4), (5) および (1), (2).

2. 定常状態　定常状態が満たすべき方程式は

$$
\begin{aligned}
\bar{C} &= \beta \bar{C} \left[1 - \delta + \alpha \bar{z} \bar{K}^{\alpha-1} \bar{N}^{1-\alpha} \right] && (6) \\
\chi \bar{C} &= (1-\alpha) \bar{z} \bar{K}^{\alpha} \bar{N}^{-\alpha} (1 - \bar{N}) && (7) \\
\bar{C} + \bar{K} - (1-\delta) \bar{K} &= \bar{z} \bar{K}^{\alpha} \bar{N}^{1-\alpha} && (8) \\
\log \bar{z} &= \rho \log \bar{z} && (9)
\end{aligned}
$$

(9) より

$$
\bar{z} = 1.
$$

(6), (7), (8) を整理すると

$$
\begin{aligned}
\beta \left[1 - \delta + \alpha \bar{K}^{\alpha-1} \bar{N}^{1-\alpha} \right] &= 1 && (10) \\
(1-\alpha) \bar{K}^{\alpha} \bar{N}^{-\alpha} (1 - \bar{N}) &= \chi \bar{C} && (11) \\
\bar{C} + \delta \bar{K} &= \bar{K}^{\alpha} \bar{N}^{1-\alpha}. && (12)
\end{aligned}
$$

(10) より,

$$\bar{K}^{\alpha-1}\bar{N}^{1-\alpha} = \left(\frac{\bar{N}}{\bar{K}}\right)^{1-\alpha} = \frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta} =: q_0, \tag{13}$$

$$\bar{N} = \left(\frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\bar{K} = q_0^{\frac{1}{1-\alpha}}\bar{K} =: q_1\bar{K}. \tag{14}$$

(12), (14) より

$$\bar{C} + \delta\bar{K} = \left(\bar{K}^{\alpha-1}\bar{N}^{1-\alpha}\right)\bar{K} = q_0\bar{K}.$$

$\bar{C}$ について解くと,

$$\bar{C} = (q_0 - \delta)\bar{K} =: q_2\bar{K}. \tag{15}$$

(11), (14), (15) より

$$(1-\alpha)q_1^{-\alpha}(1-q_1\bar{K}) = \chi q_2\bar{K}.$$

$$\bar{K} = \frac{(1-\alpha)q_1^{-\alpha}}{(1-\alpha)q_1^{1-\alpha}+\chi q_2}.$$

3. 線形化 $\hat{K}_t := dK_t/\bar{K}$, $\hat{z}_t := dz_t/\bar{z}$, $\hat{C}_t := dC_t/\bar{C}$, $\hat{N}_t := dN_t/\bar{N}$ とおいて, $\hat{K}$, $\hat{z}$, $\hat{C}$, $\hat{N}$ に関する線形システムを導出しよう. (対数線形化)

式 (4)

$$C_{t+1} = \beta C_t\left[1-\delta+\alpha z_{t+1}K_{t+1}^{\alpha-1}N_{t+1}^{1-\alpha}\right]$$

の対数を取った上で線形化する.

$$\log C_{t+1} = \log\beta + \log C_t + \log\left[1-\delta+\alpha z_{t+1}K_{t+1}^{\alpha-1}N_{t+1}^{1-\alpha}\right]$$

全微分して, (13) を使って整理すると,

$$\begin{aligned}\frac{dC_{t+1}}{\bar{C}} &= \frac{dC_t}{\bar{C}} + \frac{\alpha}{1-\delta+\alpha\bar{z}\bar{K}^{\alpha-1}\bar{N}^{1-\alpha}}\Big[\bar{K}^{\alpha-1}\bar{N}^{1-\alpha}dz_{t+1} \\ &\quad + (\alpha-1)\bar{z}\bar{K}^{\alpha-2}\bar{N}^{1-\alpha}dK_{t+1} + (1-\alpha)\bar{z}\bar{K}^{\alpha-1}\bar{N}^{-\alpha}dN_{t+1}\Big] \\ \hat{C}_{t+1} &= \hat{C}_t + \frac{\alpha q_0}{1-\delta+\alpha q_0}\left[\hat{z}_{t+1} + (\alpha-1)\hat{K}_{t+1} + (1-\alpha)\hat{N}_{t+1}\right].\end{aligned}$$

$$\alpha(\alpha-1)q_0\hat{K}_{t+1} + \alpha q_0\hat{z}_{t+1} + \alpha(1-\alpha)q_0\hat{N}_{t+1} - (1-\delta+\alpha q_0)\hat{C}_{t+1} = -(1-\delta+\alpha q_0)\hat{C}_t. \tag{16}$$

(5) を対数線形化する.

$$\log\chi + \log C_t = \log(1-\alpha) + \log z_t + \alpha\log K_t - \alpha\log N_t + \log(1-N_t).$$

$$\frac{dC_t}{\bar{C}} = \frac{dz_t}{\bar{z}} + \alpha\frac{dK_t}{\bar{K}} - \alpha\frac{dN_t}{\bar{N}} - \frac{dN_t}{1-\bar{N}}$$

$$\hat{C}_t = \hat{z}_t + \alpha\hat{K}_t - \frac{\alpha+(1-\alpha)\bar{N}}{1-\bar{N}}\hat{N}_t.$$

$$0 = \alpha \hat{K}_t + \hat{z}_t - \frac{\alpha + (1-\alpha)\bar{N}}{1-\bar{N}} \hat{N}_t - \hat{C}_t \tag{17}$$

式 (1) を対数線形化する.

$$\log\left[C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t\right] = \log z_t + \alpha \log K_t + (1-\alpha)\log N_t.$$

$$\frac{dC_t + dK_{t+1} - (1-\delta)dK_t}{\bar{C} + \bar{K} - (1-\delta)\bar{K}} = \frac{dz_t}{\bar{z}} + \alpha\frac{dK_t}{\bar{K}} + (1-\alpha)\frac{dN_t}{\bar{N}}.$$

$\bar{C} + \delta\bar{K} = q_0\bar{K}$, $\bar{C} = q_2\bar{K}$ を使って整理すると

$$\frac{dC_t + dK_{t+1} - (1-\delta)dK_t}{q_0\bar{K}} = \frac{dz_t}{\bar{z}} + \alpha\frac{dK_t}{\bar{K}} + (1-\alpha)\frac{dN_t}{\bar{N}}.$$

$$\frac{q_2}{q_0}\hat{C}_t + \frac{1}{q_0}\hat{K}_{t+1} - \frac{1-\delta}{q_0}\hat{K}_t = \hat{z}_t + \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t.$$

$$\hat{K}_{t+1} = (\alpha q_0 + 1 - \delta)\,\hat{K}_t + q_0\hat{z}_t + (1-\alpha)q_0\hat{N}_t - q_2\hat{C}_t. \tag{18}$$

最後に,

$$\log z_{t+1} = \rho \log z_t + e_t$$

から

$$\hat{z}_{t+1} = \rho\hat{z}_t + de_t = \rho\hat{z}_t + e_t. \tag{19}$$

まとめると,

$$\begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)q_0 & \alpha q_0 & \alpha(1-\alpha)q_0 & -(1-\delta+\alpha q_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K}_{t+1} \\ \hat{z}_{t+1} \\ \hat{N}_{t+1} \\ \hat{C}_{t+1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -(1-\delta+\alpha q_0) \\ \alpha & 1 & \frac{-\alpha-(1-\alpha)\bar{N}}{1-\bar{N}} & -1 \\ \alpha q_0 + 1 - \delta & q_0 & (1-\alpha)q_0 & -q_2 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{z}_t \\ \hat{N}_t \\ \hat{C}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e_t.$$

4. 分析　(E, A) を QZ 分解すると, 有限固有値

$$\mathrm{sp}(E, A) = \{0.95000000, 0.95144553, 1.06164880\}$$

と, 1 つの無限大固有値が見つかる. したがって,

$$n_s = 2,\ n_u = 2$$

である. 先決変数は $\hat{K}$, $\hat{z}$ の 2 つなので,

$$n_1 = n_s.$$

さらに,

$$Z_{1s} = \begin{bmatrix} -0.85926076 & -0.02110806 \\ 0.00000000 & 0.77147414 \end{bmatrix}$$

は正則なので, Blanchard-Kahn の条件は満たされている. 解の公式は

$$\begin{aligned} \Omega_x &= Z_{1s} S_{ss}^{-1} T_{ss} Z_{1s}^{-1} \\ \Omega_u &= Z_{1s} S_{ss}^{-1} \left[(T_{ss} Z_{1s}^{-1} Z_{1u} - T_{su}) T_{uu}^{-1} C_u + C_s \right] \\ \Omega_y &= Z_{1u} - Z_{1s} S_{ss}^{-1} S_{su} + Z_{1s} S_{ss}^{-1} (T_{su} - T_{ss} Z_{1s}^{-1} Z_{1u}) T_{uu}^{-1} S_{uu}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_x &= Z_{2s} Z_{1s}^{-1} \\ \Psi_y &= Z_{2u} - Z_{2s} Z_{1s}^{-1} Z_{1u} \end{aligned}$$

を用いて,

$$\begin{aligned} x_{t+1}^1 &= \Omega_x x_t^1 + \Omega_u e_t + \Omega_y y_{t+1}^u \\ x_t^2 &= \Psi_x x_t^1 + \Psi_y y_t^u \end{aligned}$$

と表現できるので, y_t^u を計算すればシステムの軌道が決定できる.