Jordan 標準形

経済動学 2017q1

mail@**kenjisato**.jp

ジョルダン標準形 (Jordan canonical form) を計算してみよう．

1 ジョルダン標準形

$J_r(\lambda) \in \mathbb{C}^{r\times r}$ を次のような形の行列とする．何も書かれていない部分はゼロとする．

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

行列がジョルダン標準形であるとは, 次のようなブロック対角行列であることをいう:

$$\begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}.$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ には重複があってもよい．例えば,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_3(1) & & \\ & J_2(1) & \\ & & J_1(0) \end{bmatrix}$$

はジョルダン標準形である．

自明なケースを使ってジョルダン標準形の計算方法を確認してみよう．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

固有値は

$$\det(A_1-\lambda I)=0$$

の解である．計算するまでもなく, $\lambda=1$ (2 重根) である．固有ベクトルの 1 つは

$$(A_1-\lambda I)\,p_1=0$$

の解 p_1 である．解の 1 つは

$$p_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

である．重複固有値に対する固有ベクトルは独立な次元を 1 つしか持たない．すなわち, 幾何的重複度が 1 である．このような場合には対角化はできない．

一般固有空間 $\ker(A_1-1)^2$ の基底を構成するために, 方程式

$$(A_1-\lambda I)\,p_2=p_1$$

を解く．明示的に書けば,

$$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{21}\\p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

であるから, 解の 1 つは

$$p_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

である．このようにして得られた

$$P=\begin{bmatrix}p_1&p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

が一般固有空間の基底をなす．したがって,

$$P^{-1}A_1P=J_2(1)$$

となる．ジョルダン細胞のサイズが大きい場合には

$$(A-\lambda I)\,p_{n+1}=p_n$$

を満たす p_{n+1} を探すステップを必要なだけ繰り返せばよい．

2 例

次に

$$A_2=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\1&0&2\end{bmatrix}$$

のジョルダン標準形を計算してみよう.

$$
\begin{aligned}
\det(A_2-\lambda I) &= \left|\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right| \\
&= (2-\lambda)^3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

を解くと, 固有値 $\lambda = 2$ (3 重根) を得る.

$$(A_2 - 2I)\, p_1 = 0$$

の解を求めると,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} = 0$$

より,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{11} \end{bmatrix} = 0$$

を得る. 2 つの独立な固有ベクトルをもち, 例えば

$$p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

が固有ベクトルである. 次に, 一般固有ベクトル p_2 を

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} p_2 = p_1$$

の解として求める.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

より

$$p_{21} = 1$$

を得る. したがって, 例えば

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と選べば

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

はジョルダン基底である.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

に注意して,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を得る.

3 問題

問題 1　次の行列のジョルダン標準形を求めよ.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -5 & 8 & -6 \\ -8 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

問題 2　ジョルダン細胞のべき乗

$$J_k(\lambda)^t, \quad t \in \mathbb{N}$$

を計算せよ. (ヒント:

$$\begin{aligned} J_k(\lambda) &= \lambda I_k + N_k \\ &=: \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と分解したとき,

$$(\lambda I_k)N_k = N_k(\lambda I_k), \qquad (N_k)^k = 0$$

が成り立つことに注意せよ.)

問題 3　任意の行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対し, 適当な正則行列 V を選べば $V^{-1}AV$ が Jordan 標準形となるようにできる. この定理を用いて A の固有値 λ がすべて $|\lambda| < 1$ を満たすとき

$$A^t \to 0, \quad t \to \infty$$

が成り立つことを示せ. 収束は要素ごとの収束を考えてよい.