Universidade Federal do Paraná

Centro de Estudos em Engenharia Civil

Programa de Pós-Gradução em

Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE

EDITAL N.º 20/2016 - PPGMNE/UFPR

O Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná torna pública a abertura das inscrições para as Provas de Seleção ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, **para 2017**, em nível de **Mestrado**.

1 DO FUNCIONAMENTO

1.1. O ingresso no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia para o ano de 2017 se dará em duas oportunidades, consideradas neste edital como primeira e segunda fase.

1.2. Estará apto a ingressar no curso de Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia o candidato que obtiver aprovação na primeira ou na segunda fase.

1.3. Caso não obtenha aprovação na primeira fase, o candidato poderá se inscrever para participar da segunda fase.

1.4. Caso não obtenha aprovação na primeira fase, os resultados das provas obtidos nesta fase não serão considerados na segunda fase.

1.5. O site oficial do programa é: www.ppgmne.ufpr.br.

2 DO NÚMERO DE VAGAS

2.1. O PPGMNE oferecerá, pelo menos, 16 vagas ao Mestrado para o ano de 2017.

2.2. Entre o número de vagas ofertados, 8 dessas serão ofertadas na primeira fase. Destas, 4 são referentes a área de Mecânica Computacional e 4 referentes a área de Programação Matemática.

2.3. As vagas restantes e as vagas não preenchidas na primeira fase serão ofertadas na segunda fase.

3 DAS INSCRIÇÕES

3.1. As inscrições para a primeira fase serão realizadas no período de 31 de Outubro até 17 de Novembro de 2016.

3.2. As inscrições serão realizadas através do preenchimento de formulário e envio dos documentos que constam nos itens 3.4 e 3.5 pelo sistema SIGA com acesso no link http://www.prppg.ufpr.br:8081/siga/visitante/processoseletivo/index.jsp?sequencial=220.

3.3. Ao fazer a inscrição, o candidato deverá escolher a área de concentração de interesse.

3.4. São documentos exigíveis para a inscrição no processo seletivo:

3.4.1. Ficha de inscrição;

3.4.2. Cópias do RG (ou de documento oficial que a substitua) e CPF/MF.

3.5. São documentos exigíveis para a matrícula dos aprovados no processo seletivo:

3.5.1. Uma foto (3 x 4) recente, em fundo branco;

3.5.2. *Curriculum Vitae* atualizado no modelo Currículo Lattes (lattes.cnpq.br);

3.5.3. Diploma ou certificado de conclusão do Curso de Graduação;

3.5.4. Cópia do histórico escolar do Curso de Graduação;

3.5.5. 02 (duas) cartas de recomendação.

Candidatos concluintes de cursos de graduação deverão substituir o diploma ou certificado (item 3.5.3) por declaração da coordenação do curso com previsão de conclusão da graduação.

3.6. As inscrições para a primeira fase serão homologadas até o dia 21 de Novembro de 2016.

3.7. Os recursos referentes às inscrições da primeira fase podem ser solicitados, junto à secretaria do PPGMNE, no dia 22 de Novembro de 2016.

3.8. O resultado final das inscrições na primeira fase será divulgado no dia 23 de Novembro de 2016 via site.

4 DA PRIMEIRA FASE

4.1. A primeira fase do ingresso no Curso de Mestrado obedecerá ao seguinte calendário:

ETAPAS DA SELEÇÃO	DATAS	HORÁRIOS
Inscrições	31/10 a 17/11/2016	SIGA
Homologação das inscrições	21/11/16	
Prazo para recurso das inscrições	22/11/16	Até às 17h
Resultado Final das Inscrições	23/11/16	
Prova de Seleção - Cálculo	24/11/16	14h às 18h
Prova de Seleção - Álgebra Linear	25/11/16	8h às 12h
Prova de Seleção - Algoritmos	25/11/16	14h às 18h
Resultado das Provas Escritas	05/12/16	
Prazo para recurso do resultado	08/12/16 a 09/12/2016	9h às 12h e 14h às 17h
Resultado primeira fase	13/12/16	

4.2. Para a seleção na primeira fase serão realizadas 3 provas: Cálculo, Álgebra Linear e Algoritmos.

5 DA SEGUNDA FASE

5.1. A segunda fase do ingresso no Curso de Mestrado obedecerá a calendário divulgado em edital posterior.

5.2. Para a seleção na segunda fase serão realizadas 3 provas: Cálculo, Álgebra Linear e Algoritmos.

5.3. Os candidatos que se inscreverem para concorrerem as vagas ofertadas na segunda fase do processo seletivo poderão escolher participar de um curso de nivelamento a ser realizado nas semanas anteriores a aplicação da prova.

6 DAS PROVAS

6.1. As datas das provas da primeira fase estão especificadas no item 4.1 para a primeira fase.

6.2. A prova de seleção de Cálculo terá duração de quatro horas, vedada a consulta a qualquer material bibliográfico e/ou utilização de aparelhos de comunicação e/ou calculadoras e será elaborada a partir dos seguintes conteúdos:

6.2.1. Funções de uma variável. Definição, notações e operações.

6.2.2. Limites e continuidade. Definição e operações com limites. Limites laterais.

6.2.3. Teorema do confronto. Limites fundamentais. Continuidade. Teorema do valor intermediário. Teorema de Weierstrass.

6.2.4. Derivadas. Definição e propriedades. Regra da cadeia. Teorema do valor médio. Aplicações das derivadas.

6.2.5. Integrais. Integral indefinida. Integral definida. Propriedades. Teorema fundamental do cálculo. Técnicas de integração. Aplicações da integral.

6.3. A bibliografia recomendada para a prova de seleção de Cálculo são os seguintes materiais:

6.3.1. GUIDORIZZI, H. L. Um curso de Cálculo, 2001.

6.3.2. ANTON, H. Cálculo um Novo Horizonte, 2000.

6.3.3. BOULOS, P. Cálculo Diferencial e Integral I, 2000.

6.3.4. LEITHOLD, L. Cálculo com Geometria Analítica, 1982.

6.4. A Prova de Seleção de Álgebra Linear terá duração de quatro horas, vedada a consulta a qualquer material bibliográfico e/ou utilização de aparelhos de comunicação e será elaborada a partir dos seguintes conteúdos:

6.4.1. Matrizes: Definição, operação e propriedades.

6.4.2. Sistema de equações lineares: Operações elementares. Forma escada reduzida por linhas. Redução de Gauss-Jordan.

6.4.3. Determinantes: Definição, operações e propriedades. Desenvolvimento do Laplace. Regra de Cramer.

6.4.4. O espaço vetorial R^n: Definição de espaço vetorial. Propriedades. Teoremas

6.4.5. Introdução às transformações lineares: Definição. Posto. Nulidade. Núcleo e imagem. Representação matricial. Teoremas.

6.5. A bibliografia recomendada para a prova de seleção de Álgebra Linear são os seguintes materiais:

6.5.1. LEON, S. J. Álgebra Linear com aplicações, 2011

6.5.2. KOLMAN, B. Introdução à Álgebra Linear com aplicações, 1999.

6.5.3. BOLDRINI, J. L. Álgebra Linear, 1980.

6.6. A Prova de Seleção de Algoritmos terá duração de quatro horas, vedada a consulta a qualquer material bibliográfico e/ou utilização de aparelhos de comunicação e/ou calculadoras e será elaborada a partir dos seguintes conteúdos:

6.6.1. Lógica de programação.

6.6.2. Algoritmos estruturados.

6.6.3. Modularização de algoritmos.

6.6.4. Alocação de memória: estática e dinâmica.

6.6.5. Estruturas de dados: matrizes, vetores, filas, pilhas, listas, dicionários, ponteiros.

6.6.6. Algoritmos de ordenação (por inserção e seleção).

6.6.7. Introdução a análise de complexidade de algoritmos.

6.6.8. Resolução de problemas computacionais.

6.7. A bibliografia recomendada para a prova de seleção de Algoritmos são os seguintes materiais:

6.7.1. CORMEN, T. H. Algoritmos: teoria e prática, 2002.

6.7.2. TANENBAUM, A. M. Estruturas de dados usando C., 1995.

6.7.3. WIRTH, N. Algoritmos e estruturas de dados, 1989.

6.7.4. SZWARCFITER, J. L. Estrutura de dados e seus algoritmos. 1994.

6.8. Não será permitida, em hipótese alguma, realização das provas em outro dia, horário ou fora do local designado. O candidato deverá comparecer ao local com antecedência mínima de 30 (trinta) minutos do horário marcado, munido de documento oficial de identidade ou equivalente, no seu original.

6.9. Os três últimos alunos a concluírem a prova, devem permanecer no local para assinar a ata de prova.

6.10. Durante a realização da prova, não será permitida nenhuma espécie de consulta ou comunicação entre os candidatos, nem a utilização de livros, códigos, manuais, impressos ou quaisquer anotações.

6.11. O descumprimento de alguma destas instruções implicará na eliminação do candidato, caracterizando-se tentativa de fraude.

7 DO CURSO DE NIVELAMENTO

7.1. O curso de nivelamento é um curso preparatório, opcional, voltado aos candidatos que irão participar da segunda fase do processo seletivo.

7.2. O PPGMNE oferecerá, entre Janeiro e Fevereiro de 2017, aos candidatos que irão participar da segunda fase do processo seletivo, cursos de nivelamento para cada uma das provas de seleção.

7.3. A participação nos cursos de nivelamento não é obrigatória.

7.4. O curso de nivelamento em cálculo será ministrado nas segundas, quartas e sextas das 08h às 10h em sala a ser divulgada via site e em edital físico no CESEC.

7.5. O curso de nivelamento em Álgebra Linear será ministrado nas segundas, quartas e sextas-feiras das 10h às 12h em sala a ser divulgada via site e em edital físico no CESEC.

7.6. O curso de nivelamento de Algoritmos será ministrado nas terças e quintas das 8h às 12h em sala a ser divulgada via site e em edital físico no CESEC.

7.7. Não haverá curso de nivelamento para a realização da primeira fase do processo seletivo.

8 DO RESULTADO DO PROCESSO SELETIVO

8.1. Será considerado desclassificado da primeira fase o candidato que zerar alguma das três provas.

8.2. Os candidatos ao curso de Mestrado classificados nas provas escritas serão distribuídos na ordem decrescente da soma total dos pontos obtidos nestas provas e por área escolhida.

8.3. O candidato ao curso de Mestrado será considerado aprovado no processo seletivo de acordo com sua classificação e a disponibilidade de vagas para a área e a fase escolhida.

8.4. O resultado da primeira fase será divulgado (em prazo máximo) até o dia 05 de Dezembro de 2016.

8.5. O prazo para impugnação do resultado da primeira fase é do período de 08 a 09 de Dezembro de 2016.

8.6. O resultado final da primeira fase será divulgado no dia 13 de Dezembro de 2016 via site.

9 DA MATRÍCULA

9.1. Os candidatos selecionados na primeira fase para ingressar no mestrado do PPGMNE devem realizar matrícula junto a secretaria no período de 14 a 16 de Dezembro de 2016 das 09h às 12h ou das 14h às 17h.

10 DA AULA INAUGURAL

10.1. Os candidatos selecionados para participar do PPGMNE devem comparecer à aula inaugural a ser ministrada em dia a ser definido em edital posterior às 9h no auditório do Centro de Estudos em Engenharia Civil - CESEC.

11 DAS BOLSAS DE ESTUDO

11.1. O PPGMNE recebe bolsas de estudo da CAPES, do CNPq e da Fundação Araucária.

11.2. Os três primeiros classificados na primeira fase de cada área terão prioridade para o recebimento de bolsas de estudo, caso não possuam vínculo empregatício.

11.3. As demais bolsas serão distribuídas para os demais candidatos em critérios determinados em edital posterior.

12 INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES

12.1. Para maiores informações, falar com a secretaria do PPGMNE no fone (3361-3218).

Prof.ª Dr.ª Liliana Madalena Gramani
Presidente da Comissão do Processo Seletivo

PPGMNE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA

Prova de Cálculo - 26/11/2015

Nome: ____

Área de concentração:
Programação Matemática (   )   Mecânica Computacional (   )

Instruções:

- Não é permitido consulta a nenhuma fonte externa.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- A interpretação é parte da prova.
- A resolução das questões poderá ser apresentada em qualquer ordem, desde que identificadas adequadamente.

Questão 1 (10 pontos) *Os gastos com propaganda (em bilhões de dólares) na indústria cinematográfica entre 1995 e 2004 pode ser aproximada por*

$$f(t) = \begin{cases} 0,04t + 0,33 & t \leq 4 \\ -0,01t + 1,2 & t > 4 \end{cases}$$

onde t é o número de anos a partir de 1995.

- *a - Calcule $\lim_{t \longrightarrow 4^-} f(t)$ e $\lim_{t \longrightarrow 4^+} f(t)$ e interprete os resultados.*
- *b - A função $f(t)$ é contínua em $t = 4$? O que esse resultado revela sobre o gasto com propaganda na indústria cinematográfica no período estudado?*

Questão 2 (10 pontos) *Mostre que o gráfico da função de distribuição normal de densidade de probabilidade*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

possui pontos de inflexão em $x = \pm 1$.

Questão 3 (15 pontos) *A velocidade do sangue distante r centímetros do centro de uma artéria pode ser modelada como*

$$v(r) = c(R^2 - r^2)$$

onde c é uma constante positiva, R é o raio da artéria e v é medido em centímetros por segundo. Mostre que a velocidade é máxima no centro da artéria.

Questão 4 (25 pontos) *Considerando uma partícula partindo do repouso sujeita a seguinte aceleração variável no tempo,*

$$a(t) = \frac{t}{(t+1)(t+2)} \qquad \forall t \geq 0$$

- *a - Determine a imagem da função $a(t)$.*
- *b - Lembrando que $a(t) = \frac{dv}{dt}$, ache uma expressão para a velocidade $v(t)$ da partícula.*
- *c - Qual a velocidade da partícula no ponto de aceleração máxima?*

Questão 5 (20 pontos) *O custo C previsto (em milhões de reais) para uma companhia remover p% de um resíduo químico de um corpo d'agua é mostrado na seguinte tabela*

p	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
C	0	0,7	1,0	1,3	1,7	2,0	2,7	3,6	5,5	11,2

Um modelo para esses dados é dado por

$$C = \frac{124p}{(10+p)(100-p)}, \qquad 0 \leq p < 100$$

Use esse modelo para determinar um custo médio de remoção entre 75% e 80% do resíduo químico.

Questão 6 (20 pontos) *O que há de errado com a substituição $u = x^2 - 1$ na resolução da seguinte integral?*

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{u}du = ln|u| + C = ln|x^2-1| + C$$

Calcule a integral $\int \frac{1}{x^2-1}dx$.

PPGMNE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA

Processo Seletivo para o Mestrado - 2ª fase - 11/02/2016
Prova de Cálculo - Profº Paulo de Oliveira Weinhardt

Nome: ____

Área de concentração: Programação Matemática ( ) Mecânica Computacional ( )

Instruções:

- Não é permitido consulta a nenhuma fonte externa.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- A interpretação é parte da prova.
- A resolução das questões poderá ser apresentada em qualquer ordem, desde que identificadas adequadamente.

Questão 1 (15 pontos) *Considerando a função*

$$f(x) = 1 - |x| \qquad \forall x \in [-1, +1]$$

- *a - Esboce o gráfico de $f(x)$.*
- *b - $f(x)$ é contínua em $x = 0$? Justifique.*
- *c - $f(x)$ possui derivada definida em $x = 0$? Justifique.*

Questão 2 (20 pontos) *A taxa de liberação de calor em J/s de uma determinada reação química é modelada como:*

$$\phi(t) = (1 - t)e^{-t} \qquad \forall t \geq 0$$

Considerando o modelo apresentado,

- *a - Expresse a função da energia total liberada $E(T)$ desde o instante $t = 0$ até um instante qualquer $T \geq 0$. Considere que $\phi(t) = \frac{dE}{dt}$ e $E(0) = 0$.*
- *b - Determine a imagem da função $E(T)$.*
- *c - Calcule a energia total liberada após o decorrer de um longo tempo.*

Questão 3 (25 pontos) *A edificação retratada na figura apresenta dois arcos parabólicos que contribuem tanto para a sustentação da estrutura assim como para sua estética. Cada um desses dois arcos tem seus dois apoios distando* $40m$ *e atinge uma altura de* $24m$. *Considerando o peso por metro de comprimento de* $2500N/m$, *determine o peso total dos dois arcos.*

Lembre que:

$$\int sec\,(x)\,dx = ln|secx + tgx| + C$$

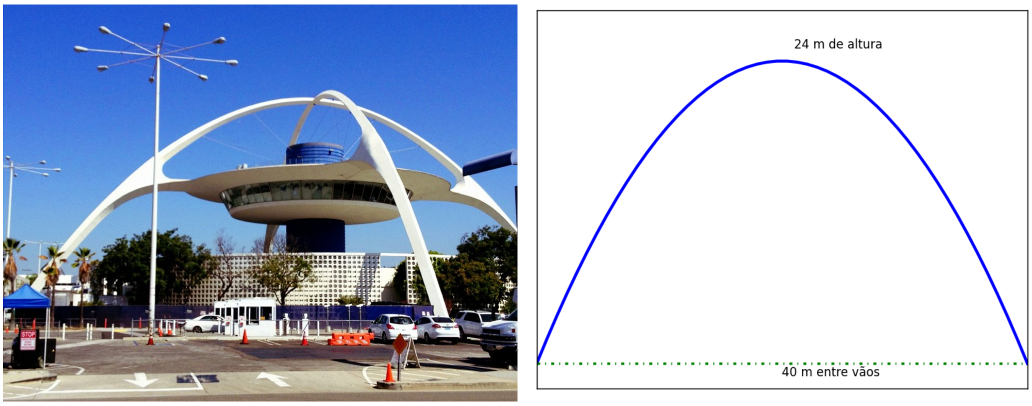


Figure 1: Estrutura do Aeroporto de Encounter - Los Angeles

Questão 4 (20 pontos) *Um corpo oscila em volta de um ponto de equilíbrio segundo a seguinte expressão:*

$$y(t) = e^{-t} sen\,(t) \qquad \forall t \geq 0$$

onde $y(t)$ *é a posição do corpo ao longo de um eixo de referência* y *no instante* t. *Com isso,*

- *a - Determine a amplitude máxima do movimento.*
- *b - Mostre que o corpo tende a parar próximo à posição inicial.*

Questão 5 (20 pontos) *Determine o valor médio da função no intervalo* $[0, 1]$, *sendo* $f(x)$ *dada pela expressão abaixo.*

$$f(t) = \frac{t}{(t+1)\,(t^2+1)}$$

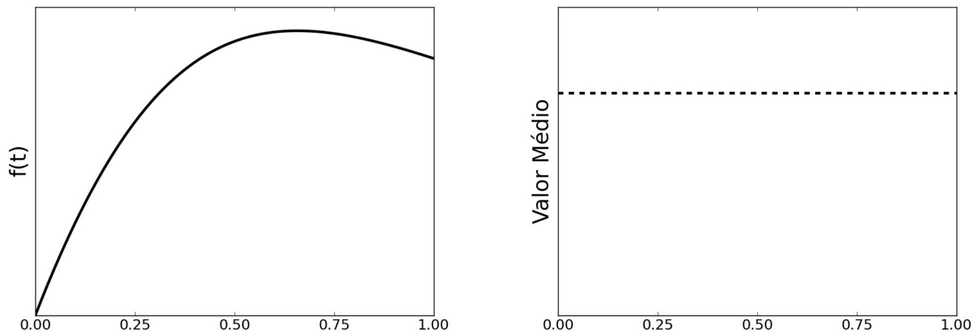


Figure 2: Função de interesse e Valor Médio da Função

Processo seletivo para o mestrado/2016 – 1ª Fase – 27/07/2015 – Valor: 100 pontos

Álgebra Linear – Prof. Romulo Leite

Nome:____Ass:________________

Área de concentração: (   ) Programação Matemática (   ) Mecânica Computacional

INSTRUÇÕES PARA A PROVA: Este teste contém 4 (quatro) questões. Resolva-as, apresentando o desenvolvimento e/ou justificativas. É permitido o uso de calculadora comum ou científica. O teste é individual e não são permitidos o uso de equipamentos de comunicação e a consulta a material impresso. O tempo de duração da prova é de 4 (quatro) horas.

Questão 1 Seja a matriz

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 9 & 48 \\ 8 & -6 & -56 \\ 8 & -9 & -68 \end{bmatrix}$$

Elabore um texto que descreva o processo para a obtenção de uma base para o espaço coluna de A. Seu texto deve, necessariamente, cumprir os seguintes requisitos:

a) Definir espaço gerado por um conjunto de vetores **(5 pontos)**;
b) Definir espaço coluna de uma matriz **(5 pontos)**;
c) Determinar o espaço coluna da matriz A **(5 pontos)**;
d) Definir base de um espaço vetorial **(5 pontos)**;
e) Determinar uma base para o espaço coluna da matriz A **(5 pontos)**.

Questão 2 Cada item a seguir apresenta uma proposição acompanhada de uma argumentação com o propósito de demonstrá-la. Avalie cada argumentação: caso julgue que a argumentação apresentada seja de fato uma demonstração para a respectiva proposição, responda “A argumentação demonstra a proposição”; caso contrário, responda “A argumentação não demonstra a proposição”, indique qual a incorreção e mostre como a demonstração deveria ter sido feita.

a) **(5 pontos)** “Seja $T:V \to W$ uma transformação linear. O núcleo de T, denotado por ker(T), é um subespaço de V.”

Demonstração:

Sejam u, v $\in$ ker(T) e α uma constante real; então:

$$T(u+v)=T(u)+T(v)=0+0=0 \Rightarrow (u+v) \in \ker(T)$$
;

$$T(\alpha.u)=\alpha.T(u)=\alpha.0=0 \Rightarrow (\alpha.u) \in \ker(T)$$
;

Portanto, ker(T) é subespaço de V. ■

b) **(5 pontos)** "Seja T:V →W uma transformação linear. A imagem de T, denotada por im(T), é um subespaço de W."

Demonstração:

Sejam $w_1, w_2 \in$ im(T) e α uma constante real; desse modo, é possível afirmar que existem u_1 e $u_2 \in$ W tais que $\begin{cases} u_1=T(w_1) \\ u_2=T(w_2) \end{cases}$;

$$u_1+u_2=T(w_1)+T(w_2)=T(w_1+w_2) \Rightarrow (u_1+u_2) \in im(T)$$
;

$$\alpha.u_1=\alpha.T(w_1)=T(\alpha.w_1) \Rightarrow (\alpha.u_1) \in im(T)$$
;

Portanto, im(T) é subespaço de W. ■

c) **(7,5 pontos)** "Sejam V e W espaços vetoriais tais que dim(V) = dim(W) (dimensão de V igual à dimensão de W); seja, ainda, T:V→W uma transformação linear. Então, T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora".

Demonstração:

Seja T injetora;

$$\dim(W)=\dim(V)=\dim(\ker(T))+\dim(im(T))=0+\dim(im(T))=\dim(im(T)) \Rightarrow$$

T é sobrejetora;

Seja T sobrejetora e sejam $v_1, v_2 \in$ V, tais que $T(v_1) = T(v_2)$;

$$T(v_1)=T(v_2) \rightarrow T(v_1-v_2)=0 \Rightarrow (v_1-v_2) \in \ker(T)$$
;

Como T é sobrejetora, dim(W) = dim(im(T)), o que implica que dim(ker(T)) = 0, ou seja, ker(T) = {0}; portanto:

$$v_1-v_2=0 \rightarrow v_1=v_2 \Rightarrow$$
T é injetora. ■

d) **(7,5 pontos)** “Seja T:V→W uma transformação linear. Então, T é injetora se, e somente se, o núcleo de T, ker(T), é um conjunto unitário cujo único elemento é o vetor nulo.”

Demonstração:

Sejam T uma transformação linear injetora e v ∈ ker(T);

$$\begin{cases} T(v)=0 \\ T(0)=0 \end{cases} \rightarrow T(v)-T(0)=0 \rightarrow T(v)=T(0)$$

;

Como T é injetora:

$$v=0 \Rightarrow \ker(T)=\{0\}$$

. ■

Questão 3 Suponha que os três pontos (1, -5), (-1, 1) e (2, 7) pertençam à parábola $p(x) = a.x^2 + b.x + c$.

a) **(7,5 pontos)** Determine um sistema linear de três equações a três incógnitas que deve ser resolvido para calcular os coeficientes a, b e c;
b) **(5 pontos)** Resolva o sistema linear obtido no item anterior a determine os valores dos coeficientes a, b e c;
c) **(5 pontos)** Aos três pontos dados, acrescente o ponto (0, 0). Determine o sistema linear de quatro equações a três incógnitas que deve ser resolvido para calcular os coeficientes a, b e c para este novo conjunto de pontos e resolva-o, apresentando o conjunto solução para este sistema linear;
d) **(7,5 pontos)** Interprete o significado do conjunto de soluções do sistema linear obtido no item c).

Questão 4 Leia o seguinte trecho, extraído do livro “Álgebra Linear com Aplicações”, 8ªed. (KOLMAN; HILL, 2006) e, em seguida, responda ao que se pede:

“A criptografia é a técnica de codificar e decodificar mensagens; ela existe desde o tempo da Grécia antiga. Um código simples é construído associando um número diferente a cada letra do alfabeto. Por exemplo,

A	1	**G**	7	**M**	13	**S**	19	**Y**	25
B	2	**H**	8	**N**	14	**T**	20	**Z**	26
C	3	**I**	9	**O**	15	**U**	21		
D	4	**J**	10	**P**	16	**V**	22		
E	5	**K**	11	**Q**	17	**W**	23		
F	6	**L**	12	**R**	18	**X**	24		

Suponha que Marcos e Suzana sejam dois agentes secretos que querem se comunicar usando um código, pois suspeitam que seus telefones estejam grampeados e suas cartas sendo interceptadas. Em particular, Marcos quer enviar a seguinte mensagem para Suzana

ENCONTRO AMANHÃ

Usando o esquema de substituição dado anteriormente, Marcos envia a mensagem

5 14 3 15 14 20 18 15 1 13 1 14 8 1 14

(onde o Ã foi substituído por AN). Um código desse tipo poderia ser quebrado sem muita dificuldade por várias técnicas, incluindo a análise de frequência das letras. Para tornar difícil a quebra do código, o agente procede da seguinte maneira: em primeiro lugar, ao aceitar a missão, eles escolheram uma matriz 3 x 3 do tipo

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Marcos, então, divide a mensagem em cinco vetores em R^3 (se isto não puder ser feito, é possível adicionar letras extras). Assim, têm-se os vetores

$$\begin{bmatrix}5\\ 14\\ 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}15\\ 14\\ 20\end{bmatrix},\begin{bmatrix}18\\ 15\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}13\\ 1\\ 14\end{bmatrix},\begin{bmatrix}8\\ 1\\ 14\end{bmatrix}$$

Marcos, agora, define uma transformação linear L: R^3 -> R^3 por L(x) = Ax, logo a mensagem torna-se

$$A\begin{bmatrix}5\\ 14\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}42\\ 25\\ 20\end{bmatrix}, A\begin{bmatrix}15\\ 14\\ 20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}103\\ 69\\ 54\end{bmatrix}, A\begin{bmatrix}18\\ 15\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}51\\ 35\\ 17\end{bmatrix}, A\begin{bmatrix}13\\ 1\\ 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}57\\ 42\\ 29\end{bmatrix}, A\begin{bmatrix}8\\ 1\\ 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}52\\ 37\\ 29\end{bmatrix}$$

Assim, Marcos transmite a mensagem

42 25 20 103 69 54 51 35 17 57 42 29 52 37 29

(...)”

a) **(5 pontos)** Suponha que Marcos precisa informar sua localização para Suzana. Usando a mesma matriz A do enunciado e as mesmas técnicas para codificar e para dividir o texto em vetores do R^3, qual deve ser o conteúdo da mensagem a ser transmitida por Marcos, dado que sua localização atual é DINAMARCA?
b) **(10 pontos)** Suponha que Suzana tenha enviado a Marcos uma mensagem criptografada contendo a localização dela. O texto enviado por Suzana é:

   79 48 43 74 47 32 35 25 11

   Qual a localização de Suzana?

c) **(10 pontos)** Seja a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz B pode ser usada como chave no lugar da matriz A? Justifique.

BOA SORTE!

Processo seletivo para o mestrado/2016 – 2ª Fase – 12/02/2016 – Valor: 100 pontos

Álgebra Linear – Prof. Romulo Leite

Nome:____Ass:________________

Área de concentração: (   ) Programação Matemática (   ) Mecânica Computacional

INSTRUÇÕES PARA A PROVA: Esta prova contém 5 (cinco) questões. Resolva-as, apresentando o desenvolvimento e/ou justificativas. É permitido o uso de calculadora comum ou científica. O teste é individual e não são permitidos o uso de equipamentos de comunicação e a consulta a material impresso. O tempo de duração da prova é de 4 (quatro) horas.

Questão 1 A respeito de sistemas de equações lineares, faça o que se pede:

a) **(2,5 pontos)** Defina sistema de equações lineares.
b) **(2,5 pontos)** Defina sistemas equivalentes.
c) **(2,5 pontos)** Cite as três operações elementares aplicadas no escalonamento de matrizes.
d) **(2,5 pontos)** Descreva a relação entre os postos da matriz de coeficientes e da matriz ampliada e a quantidade de soluções de um sistema.
e) **(2,5 pontos)** Encontre as possíveis soluções para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3w = 13 \\ x - 2y + z + w = 8 \\ 3x + y + z - w = 1 \end{cases}$$

f) **(2,5 pontos)** Encontre uma base para o núcleo da matriz dos coeficientes do sistema do item e).
g) **(5 pontos)** O conjunto das soluções possíveis para o sistema do item e) é um subespaço do R^4?, Justifique.
h) **(5 pontos)** Sejam $\alpha \in R$, v_1 e v_2 vetores que são, ambos, soluções para o sistema do item e). Verifique se o vetor $v_3 = \alpha.v_1 + (1 - \alpha).v_2$ também é solução para esse sistema.

Questão 2 Cada item a seguir apresenta uma proposição acompanhada de uma argumentação com o propósito de demonstrá-la. Avalie cada argumentação: caso julgue que a argumentação apresentada seja de fato uma demonstração para a respectiva proposição, responda “A argumentação demonstra a proposição”; caso contrário, responda “A argumentação não demonstra a proposição”, indique qual a incorreção e mostre como a demonstração deveria ter sido feita.

a) **(5 pontos)** “Seja A uma matriz m x n. O núcleo de A, denotado por ker(A), é um subespaço de R^n.”

Demonstração:

Sejam u e v vetores pertencentes a ker(A) e α uma constante real; então:

$$\begin{cases} Au = 0 \\ Av = 0 \end{cases};$$

$$A(u+v) = Au + Av = 0 + 0 = 0;$$

$$A(\alpha u) = \alpha(Au) = \alpha.0 = 0;$$

Portanto, $\begin{cases} u+v \in \ker(A) \\ \alpha u \in \ker(A) \end{cases} \Rightarrow$ ker(A) é subespaço de R^n. ■

b) **(5 pontos)** “Seja V um espaço vetorial e $\{v_1,...,v_n\}$ um conjunto de n vetores que é uma base para V. Então, todo conjunto linearmente independente (LI) de vetores de V tem no máximo n vetores.”

Demonstração:

Se $\{v_1,...,v_n\}$ é base para V, então a dimensão de V dim(V) = n;

Seja S = $\{w_1,...,w_k\}$ um conjunto LI de vetores de V; então:

Se k < n -> S não gera V; acrescentando n-k vetores de V a S até que S gere V, mantendo-o LI, obtém-se uma base para V;

Se k = n -> S gera V e, portanto, é base para V;

Se k > n -> S gera V; mas dim(V) = n, ou seja, bastam n vetores para gerar V. Então, há k-n vetores em S que são combinações lineares dos demais e, por isso, S é linearmente dependente. No entanto, por hipótese, S é LI (contradição!)

Portanto, conclui-se que k ≤ n, o que significa dizer que todo conjunto de vetores LI de V tem no máximo n vetores. ■

c) **(7,5 pontos)** “Seja W subespaço de V. Se $\{v_1,...,v_k\}$ é um conjunto de vetores que gera W, então algum subconjunto de $\{v_1,...,v_k\}$ é base para W. Em outras palavras, se $\{v_1,...,v_k\}$ gera W e é linearmente dependente (LD), é possível obter uma base para W retirando-se vetores de $\{v_1,...,v_k\}$.”.

<u>Demonstração:</u>

Caso $\{v_1,...,v_k\}$ seja LI, então esse próprio conjunto é base para W;

Caso $\{v_1,...,v_k\}$ seja LD:

Sejam $\begin{cases} w \in W \\ 1 \leq j \leq k \end{cases}$, de modo que w pode ser escrito como combinação linear de $v_1,...,v_k$;

Como $\{v_1,...,v_k\}$ é LD, para algum j :

$$v_j = \beta_1 v_1 + ... + \beta_{j-1} v_{j-1} + \beta_{j+1} v_{j+1} + ... + \beta_k v_k ;$$

Assim:

$$\begin{aligned}
&w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_j v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + ... + \alpha_k v_k = \\
&\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_j \left(\beta_1 v_1 + ... + \beta_{j-1} v_{j-1} + \beta_{j+1} v_{j+1} + ... + \beta_k v_k\right) + \alpha_{j+1} v_{j+1} + ... + \alpha_k v_k = \\
&\left[\alpha_1 + \alpha_j \beta_1\right] v_1 + ... + \left[\alpha_{j-1} + \alpha_j \beta_{j-1}\right] v_{j-1} + \left[\alpha_{j+1} + \alpha_j \beta_{j+1}\right] v_{j+1} + ... + \left[\alpha_k + \alpha_j \beta_k\right] v_k
\end{aligned}$$

e, portanto, $\{v_1,...,v_{j-1},v_{j+1},...,v_k\}$ gera W.

Como $\{v_1,...,v_{j-1},v_{j+1},...,v_k\}$, obtido de $\{v_1,...,v_k\}$ retirando-se v_j, é necessariamente LI, então $\{v_1,...,v_{j-1},v_{j+1},...,v_k\}$ é base para W.■

d) **(7,5 pontos)** “Seja $\{v_1,...,v_n\}$ um conjunto de vetores que é base para o espaço vetorial V. Então, todo vetor de V pode ser escrito de forma única como combinação linear dos vetores $v_1,...,v_n$.”

<u>Demonstração:</u>

Como $\{v_1,...,v_n\}$ é base para V, então $\{v_1,...,v_n\}$ gera V; se um vetor $u \in V$ qualquer pertence ao espaço gerado por $v_1,...,v_n$, é possível concluir que u pode ser escrito de forma única como combinação linear de $v_1,...,v_n$.■

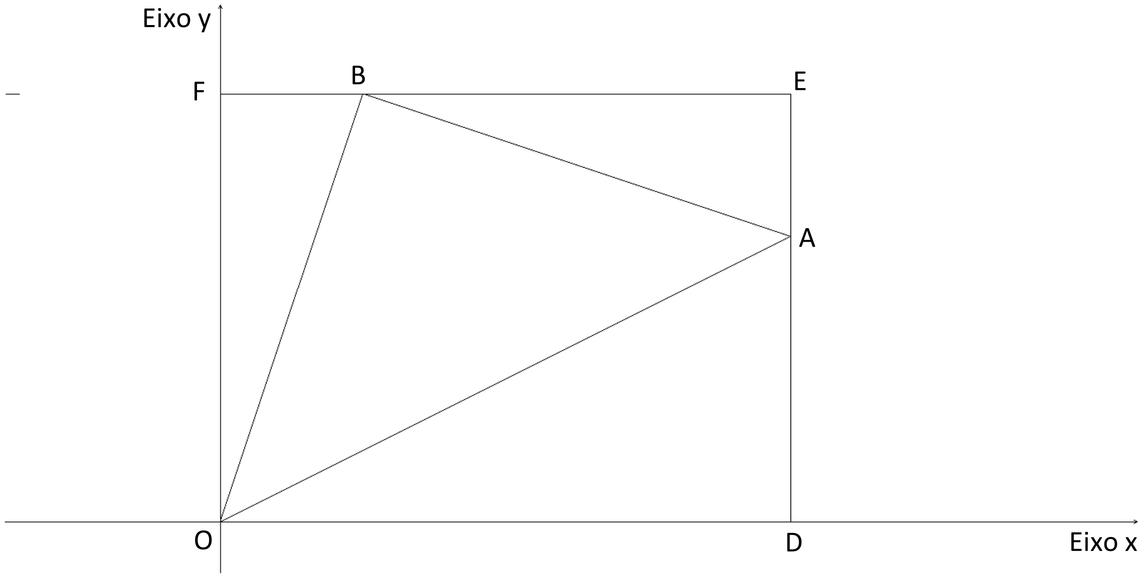
Questão 3 (10 pontos) Sejam E = $\{u_1,u_2,u_3\}$ e F = $\{b_1,b_2\}$ bases de R^3 e R^2, respectivamente, de modo que $u_1 = (1,0,-1)^T$, $u_2 = (1,2,1)^T$, $u_3 = (-1,1,1)^T$, $b_1 = (1,-1)^T$ e $b_2 = (2,-1)^T$. Além disso, seja L uma transformação linear de R^3 em R^2, tal que $L(x_1,x_2,x_3) = (2x_2,-x_1)^T$. Encontre a matriz de L em relação às bases ordenadas E e F.

Questão 4 Seja $P = A(A^TA)^{-1}A^T$, onde $A \in R^{nxn}$ é não-singular.

a) **(10 pontos)** Calcule $\det(P^8)$.
b) **(5 pontos)** Mostre que P é simétrica.

Questão 5 Leia o texto a seguir e faça o que se pede:

Considere o triângulo ABO, conforme a figura abaixo:



A área do retângulo ODEF, denotada por S(ODEF), pode ser escrita como

$$S(ODEF) = S(ABO) + S(AOD) + S(AEB) + S(BFO) \qquad (1)$$

Seja O a origem do plano cartesiano e sejam os pontos A e B dados por A = (x_a, y_a) e B = (x_b, y_b). É possível escrever as expressões das áreas do retângulo ODEF e dos triângulos AOD, AEB e BFO em função das coordenadas de A e B:

$$S(ODEF) = x_a.y_b \qquad (2)$$

$$S(AOD) = \frac{x_a.y_a}{2} \qquad (3)$$

$$S(AEB) = \frac{(y_b - y_a).(x_a - x_b)}{2} \qquad (4)$$

$$S(BFO) = \frac{x_b.y_b}{2} \qquad (5)$$

Substituindo as expressões (2), (3), (4), e (5) em (1) e isolando S(ABO), têm-se:

$$S(ABO) = x_a.y_b - \frac{x_a.y_a}{2} - \frac{(y_b - x_b).(x_a - x_b)}{2} - \frac{x_b.y_b}{2} \qquad (6)$$

que pode ser simplificada, de modo a obter

$$S(ABO) = \frac{x_a.y_b}{2} - \frac{y_a.x_b}{2} \qquad (7)$$

Assim, a expressão (7) pode ser escrita em função de um determinante, da seguinte maneira:

$$S(ABO) = \frac{1}{2}.\det\begin{bmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{bmatrix} \qquad (8)$$

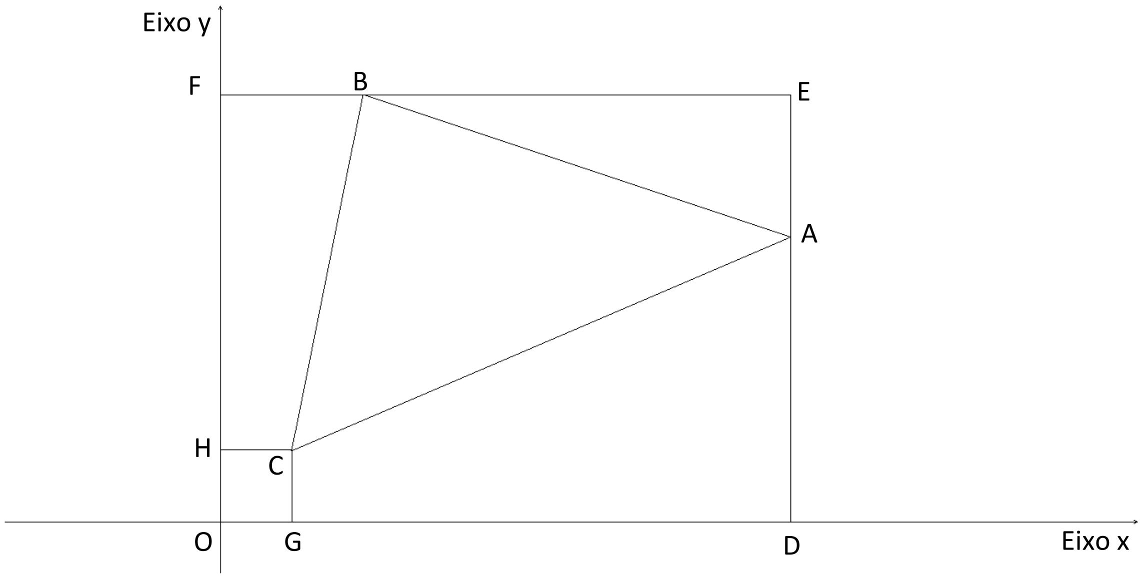
Caso seja invertida a ordem dos pontos, a expressão (8) resultará no valor oposto da área do triângulo. Para evitar esse problema, basta tomar o módulo do determinante, conforme a expressão a seguir:

$$S(ABO) = \frac{1}{2}.\left|\det\begin{bmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{bmatrix}\right| \qquad (9)$$

Dessa forma, é possível calcular a área do triângulo ABO em função do determinante de uma matriz que contém as coordenadas dos pontos A e B.

a) **(10 pontos)** Seja A um ponto qualquer do segmento DE e B um ponto qualquer do segmento EF. Se D, E e F são pontos fixos, explique qual a condição sobre os pontos A e B para que a matriz da expressão (9) seja singular?

b) **(10 pontos)** Seja o triângulo ABC como na figura abaixo:



Sabendo que a área de um trapézio é dada pela metade do produto da distância entre os lados paralelos pela soma dos comprimentos dos lados paralelos, encontre uma expressão para a área do triângulo ABC em função do determinante de uma matriz que contenha as coordenadas dos pontos A, B e C.

c) **(5 pontos)** Use a expressão encontrada no item b) para calcular a área de um triângulo ABC cujos vértices são A = (4, 2), B = (1, 3) e C =(½, ½).

BOA SORTE!

Universidade Federal do Paraná
Setor de tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia

Processo Seletivo PPGMNE/2016

Algoritmos – Prof. Guilherme Augusto Pianezzer
27/11/2015, Valor: 100 pontos.

Área de Concentração

( ) Programação Matemática
( ) Mecânica Computacional

Instruções

1. A interpretação das questões é parte do processo de avaliação.
2. As respostas e o desenvolvimento devem ser bem argumentados.
3. A duração da prova é de 4 horas.
4. Toda função utilizada deve ser declarada e bem definida.

Questões

Questão 1. Seja o algoritmo da Figura 1 que representa o algoritmo *Insertion-Sort*.

```
INSERTION-SORT(A)
for j = 2 to length[A]
    key = A[j]
    // Insere A[j] na sequência ordenada A[1..j − 1]
    i = j − 1
    while i > 0 and A[i] > key
        A[i + 1] = A[i]
        i = i − 1
    A[i + 1] = key
```

Figura 1: Insertion Sort

(5 pontos) Determine o número de instruções do algoritmo para o caso em que o vetor já está ordenado (melhor caso). Justifique a sua resposta.

(10 pontos) Determine o número de instruções do algoritmo para o pior caso. Justifique a sua resposta.

(5 pontos) Modifique o código de forma que a ordenação seja realizada por ordem decrescente.

Questão 2. **(10 pontos)** Escreva um algoritmo que ordena de forma crescente as letras pela freqüência de ocorrência em um texto informado pelo usuário através do teclado. Utilize um dos métodos de ordenação.

Questão 3. **(10 pontos)** Projete um algoritmo que permita encontrar a mediana de um vetor não ordenado de n elementos. Analise sua complexidade no melhor e no pior caso.

Questão 4. **(15 pontos)** Discuta a diferença entre as seguintes estruturas de dados: (1) Pilha. (2) Lista. (3) Fila. Discuta exemplos de aplicação.

Questão 5. Considere o tipo abstrato de dados Pilha com as seguintes especificações:

- $CriarP(\,)$ cria uma pilha vazia.

- $Push(P, i)$ insere o item i no topo da pilha P.

- $Pop(P)$ retira e retorna da pilha P o item que está no topo da pilha P,

- $Pop(P)$ para pilha P vazia = Erro.

Com essa especificação, determine quais são os resultados das expressões mostrando o passo a passo da execução.

a) **(2 pontos)** $Pop(Push(CriarP(\,), X))$
b) **(3 pontos)** $Pop(CriarP(\,))$
c) **(5 pontos)** $Pop(Push(Push(Pop(CriarP(\,)), X), Y))$

Questão 6. **(15 pontos)** Diz-se que uma matriz quadrada inteira é um quadrado mágico se a soma dos elementos de cada linha, a soma dos elementos de cada coluna e a soma dos elementos das diagonais principal e secundária são todas iguais. Dada uma matriz quadrada A de ordem n, desenvolver um programa que permita verificar se A é um quadrado mágico.

Questão 7. Considere uma matriz de distância entre seis cidades:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1.		63	210	190		190
2.	63		160	150	95	
3.	210	160		10		
4.	190	150	10			
5.		95				80
6.	190				80	

Considere também um vetor de viagem indo da cidade 3. até a cidade 1. pela seguinte rota:

Cidades	3.		4.	2.	5.	6.	1.

(20 pontos) Faça um programa que leia a matriz e o vetor dados e calcule a distância percorrida durante a viagem.

Processo seletivo para o mestrado/2016 – 2ª Fase – 12/02/2016 – Valor: 100 pontos

Algoritmo e Estrutura de Dados – Prof. Tulipa Silva

Nome: ______________________________________ Ass: ________________

Área de concentração: ( ) Programação Matemática ( ) Mecânica Computacional

1. A interpretação das questões é parte do processo de avaliação.
2. Respostas e desenvolvimento das questões devem ser bem argumentados.
3. A duração da prova é de 4 horas.
4. As estruturas e comandos presentes nesta prova podem ser utilizados livremente durante a prova, independente das questões terem sido resolvidas ou não.
5. Não poderão ser utilizadas funções prontas, salvo menção do contrário.
6. Não é permitido o uso de eletrônicos.

Questão 1: A função exponêncial natural pode ser definida como a série:

$$e^x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

a) (10 pontos) Escreva um subalgoritmo chamado $fatorial$ que retorna o fatorial de um número natural recebido como parâmetro.

b) (15 pontos) Escreva um subalgoritmo chamado exp que recebe um número real x e retorna e^x, usando a série descrita neste enunciado. A série deverá ser truncada quando a parcela a ser somada for menor, em módulo, a 10^{-3}.

Questão 2: O problema da mochila é um problema de otimização combinatória. O nome dá-se devido ao modelo de uma situação em que é necessário preencher uma mochila com objetos de diferentes pesos e valores. O objetivo é que se preencha a mochila com o maior valor possível, não ultrapassando o peso máximo.

a) (10 pontos) Escreva um subalgoritmo chamado fit que recebe como parâmetros um vetor p de pesos, um vetor v de valores, um vetor q de quantidades e retorna o peso e valor total da mochila. Sendo que $v[i]$, $p[i]$ e $q[i]$ representam, respectivamente, o valor, o peso e a quantidade do objeto i presente na mochila. Considere $length(a)$ a função que retorna o número de elementos do vetor a. Apresente mensagens de erro adequadas a cada condição de consistência.

b) (5 pontos) Realize o teste de mesa com seu subalgoritmo fit usando
$v = \begin{bmatrix} 40 & 25 & 20 & 100 \end{bmatrix}$, $p = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 5 & -20 \end{bmatrix}$, e $q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

c) (10 pontos) Faça uma representação em fluxograma para seu subalgoritmo fit.

Questão 3:(25 pontos) O Método de Euler Melhorado é um método numérico para resolver o problema de valor inicial, PVI, bem posto, dado por: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$. Onde y' representa a derivada da função y. Os valores x_0 e y_0 são condições iniciais dadas.

O método consiste em obter, iterativamente, aproximações para y até o valor de x desejado, utilizando as equações:

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f(x_i + h, \quad y_i + hk_1),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2).$$

Por exemplo, para obter uma aproximação para $y(0.3)$ com $y' = 2 - x + 3y$, $y(0) = 1$ e passo $h = 0.1$, temos:

x_i	$y_{i+1} = y_i + 0.05(k_1 + k_2)$	$k_1 = f(x_i, y_i)$	$k_2 = f(x_i + 0.1, y_i + 0.1k_1)$
$x_0 = 0.0$	$y_0 = 1$	5	6.4
$x_1 = 0.1$	$y_1 = 1.57$	6.61	8.493
$x_2 = 0.2$	$y_2 = 2.325$	8.775	11.306
$x_3 = 0.3$	$y_3 = 3.329$		

E, portanto $y(0.3) = y_3 = 3.329$.

Escreva o algoritmo de uma função chamada $Euler$ que recebe como parâmetros o valor desejado de x, o passo h e obtém $y(x)$ para o PVI $\begin{cases} y' = e^x - y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$. A função $Euler$ deve retornar o valor de $y(x)$, conforme instruções do Método de Euler Melhorado dadas no enunciado, caso o passo h divida o intervalo em um número inteiro de vezes e uma mensagem de erro caso contrário. Considere $a\%b$ o resto da divisão de a por b. Utilize a função exp da **Questão 1**.

Questão 4: Para cada uma das afirmações abaixo indique se é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta. Items não justificados não serão pontuados.

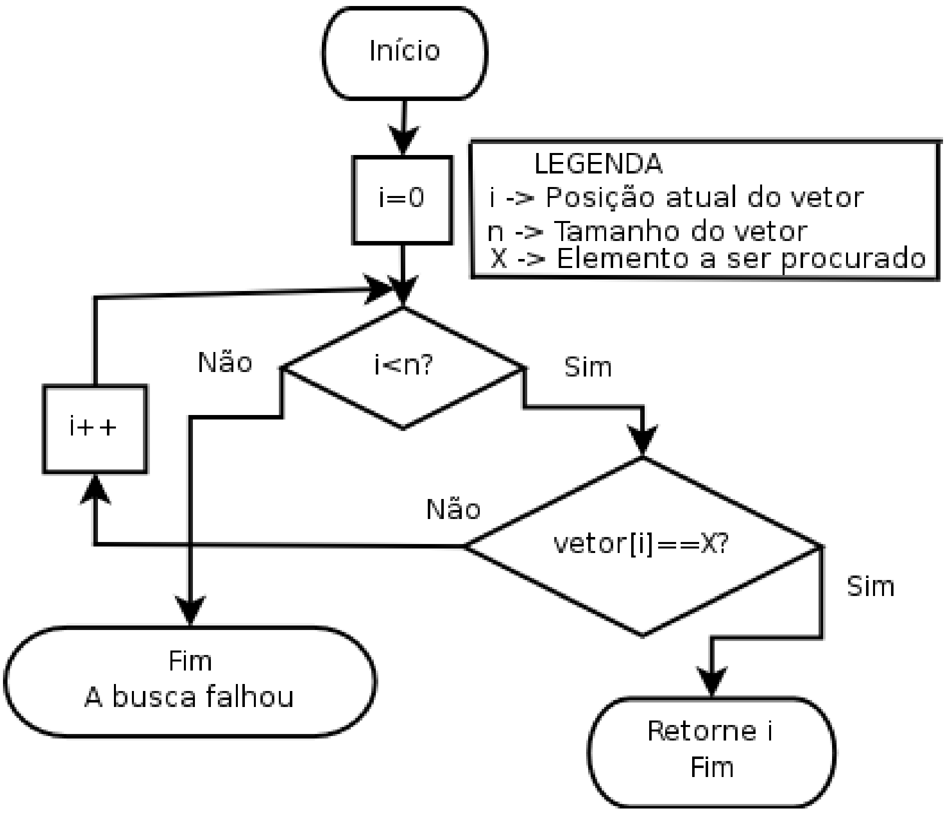
( ) **a)(5 pontos)** O algoritmo de ordenação abaixo, conhecido como *Bubble Sort Melhorado*, possui ordem de complexidade linear no caso em que o vetor v está ordenado.

Algoritmo: BubbleSortMelhorado

---

function OBSM(v)
  $troca = True$
  while $troca == True$
    $troca = False$
    for $j = (1, lengh(v) - 1)$
      if $v[j+1] < v[j]$ **then**
        $aux = v[j+1]$
        $v[j+1] = v[j]$
        $v[j] = aux$
        if $troca == False$ **then**
          $troca = True$
  return v

(   ) **b)(5 pontos)** O fluxograma abaixo representa um subalgoritmo do tipo função que busca o elemento X em um vetor v, ambos recebidos por passagem de parâmetros.



(   ) **c)(5 pontos)** Toda pilha e fila é também um tipo de lista. A diferença entre estes tipos abstratos de dados está nos métodos associados a entrada e retirada de elementos.

(   ) **d)(5 pontos)** Não há utilidade para algoritmos de ordenação, portanto não há necessidade em estudá-los.

(   ) **e)(5 pontos)** É possível utilizar uma lista como vetor, mas jamais um vetor como lista.

Boa prova!