

MAF 261 - Estatística Experimental

Prof. Fernando de Souza Bastos

Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Florestal

12/03/2019

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Inferência Estatística
- 3 Testes de hipóteses
- 4 tikz

Filosofia do Curso:

- Tomar ciência da importância em aprender Estatística;

Filosofia do Curso:

- Tomar ciência da importância em aprender Estatística;
- Importância de aprender a trabalhar com softwares para análises estatísticas;

Filosofia do Curso:

- Tomar ciência da importância em aprender Estatística;
- Importância de aprender a trabalhar com softwares para análises estatísticas;
- Os exercícios devem ser replicados em softwares;

Filosofia do Curso:

- Tomar ciência da importância em aprender Estatística;
- Importância de aprender a trabalhar com softwares para análises estatísticas;
- Os exercícios devem ser replicados em softwares;
- O estudo e a prática levam a perfeição!

Experimentação é uma área da estatística que estuda o planejamento, coleta de dados, execução, análise e interpretação de resultados provenientes de experimentos. Ela oferece suporte probabilístico ao pesquisador e lhe permite, com grau de incerteza conhecido, fazer inferências sobre o comportamento de diferentes fenômenos da natureza.

Experimento:

- É a ação ou o efeito de experimentar;

Experimento:

- É a ação ou o efeito de experimentar;
- É conhecimento adquirido pela prática da observação ou exercício;

Experimento:

- É a ação ou o efeito de experimentar;
- É conhecimento adquirido pela prática da observação ou exercício;
- São ensaios, tentativas para verificar ou demonstrar qualquer coisa. Pode também ser definido como um teste ou um conjunto de testes realizados com a finalidade de verificar uma hipótese ou induzir uma hipótese a partir da observação de um fenômeno natural ou provocado.

Objetivos do Experimento:

Em geral, os objetivos de um experimento são:

- Determinar quais **fatores** mais afetam a variável de interesse;

Objetivos do Experimento:

Em geral, os objetivos de um experimento são:

- Determinar quais **fatores** mais afetam a variável de interesse;
- Determinar os valores necessários dos **fatores controláveis** de forma a obter a saída mais próxima do valor nominal desejado;

Objetivos do Experimento:

Em geral, os objetivos de um experimento são:

- Determinar quais **fatores** mais afetam a variável de interesse;
- Determinar os valores necessários dos **fatores controláveis** de forma a obter a saída mais próxima do valor nominal desejado;
- Determinar que valores atribuir aos fatores controláveis do processo, de forma a tornar pequena a **variabilidade** na saída;

Objetivos do Experimento:

Em geral, os objetivos de um experimento são:

- Determinar quais **fatores** mais afetam a variável de interesse;
- Determinar os valores necessários dos **fatores controláveis** de forma a obter a saída mais próxima do valor nominal desejado;
- Determinar que valores atribuir aos fatores controláveis do processo, de forma a tornar pequena a **variabilidade** na saída;
- Determinar que valores atribuir aos fatores controláveis do processo, de forma a torna-lo mais robusto aos efeitos das **variáveis não controláveis**;

Objetivos do Experimento:

Em geral, os objetivos de um experimento são:

- Determinar quais **fatores** mais afetam a variável de interesse;
- Determinar os valores necessários dos **fatores controláveis** de forma a obter a saída mais próxima do valor nominal desejado;
- Determinar que valores atribuir aos fatores controláveis do processo, de forma a tornar pequena a **variabilidade** na saída;
- Determinar que valores atribuir aos fatores controláveis do processo, de forma a torna-lo mais robusto aos efeitos das **variáveis não controláveis**;
- Diminuição de **custos**, **melhoria de processos**, **aumento da produção**, **diminuição da variabilidade** e diversos outros.

Diretrizes para o planejamento de um experimento

O **planejamento** e a correta execução de um experimento são pontos essenciais para o seu sucesso. Sem planejamento, a avaliação dos resultados e a inferência podem ser prejudicadas ou **inviabilizadas**.

Diretrizes para o planejamento de um experimento

Reconhecimento, relato do problema, conjectura!

Torna-se bastante difícil reconhecer e aceitar a existência de um problema, se não ficar claro para todos qual é o problema e quais os objetivos a serem alcançados com a solução do mesmo. Neste ponto, é importante **conversar** com todos os envolvidos no processo e elaborar uma hipótese original que motivará o experimento.

Diretrizes para o planejamento de um experimento

Escolha dos fatores, dos níveis, da variável resposta e o planejamento experimental.

É importante investigar todos os fatores que possam ser importantes no desenvolvimento do processo ou produto, a variável que queremos medir e o **delineamento** (metodologia) utilizada para investigar e tentar responder a conjectura.

Diretrizes para o planejamento de um experimento

Experimento

Quando da realização do experimento, é de vital importância **monitorar** o processo, para garantir que tudo esteja sendo feito de acordo com o planejamento. Erros no procedimento experimental neste estágio, em geral, destruirão a validade do experimento.

Análise dos dados

Métodos estatísticos devem ser usados para analisar os dados, de modo que os resultados e conclusões sejam objetivos. Se o experimento foi planejado corretamente e se foi realizado de acordo com o planejamento, então os tipos de métodos estatísticos exigidos não são complicados.

Conclusões e recomendações

Uma vez analisados os dados, o experimento deve acarretar conclusões práticas sobre os resultados e recomendar um curso de ação. **Métodos gráficos** são, em geral, usados neste estágio, particularmente na apresentação dos resultados para outras pessoas. Sequências de acompanhamento e testes de confirmação podem ser também realizados para validar as conclusões do experimento.

Todos os experimentos devem ser bem planejados. Infelizmente, muitos não seguem este princípio e, como resultado, fontes valiosas de recursos, de tempo e de mão de obra são perdidos. Experimentos estatisticamente bem planejados permitem ganhos de eficiência e economia no processo experimental e o uso de métodos estatísticos na avaliação de resultados resulta na objetividade científica na obtenção de conclusões.

A **inferência estatística** consiste em métodos usados para tomar decisões ou tirar conclusões acerca de uma população. Para tirar conclusões, esses métodos utilizam a informação contida em uma **amostra** proveniente da **população**. Dividimos a inferência em duas grande áreas: Estimação de parâmetros e teste de hipóteses. Vejamos exemplos para diferenciar estas áreas!

Estimação de parâmetros

Um candidato a um cargo público pode desejar estimar a verdadeira proporção de eleitores a seu favor ao obter as opiniões de uma amostra aleatória de 100 eleitores. A quantidade de eleitores na amostra que favorece o candidato poderia ser utilizada como uma estimativa da verdadeira proporção de eleitores na população. Se tivermos conhecimento da distribuição amostral da variável proporção de candidatos podemos estabelecer o grau de certeza da estimação. Por isso, esse problema faz parte da área de estimação.

O mesmo candidato ao cargo público pode desejar saber se a proporção de eleitores que o favorece no bairro A é maior que a proporção de eleitores que o favorece no bairro B. Temos aqui um problema de teste de hipóteses.

Qual a distribuição da altura dos alunos da UFV? É razoável pensar num modelo Normal, a questão agora é identificar os parâmetros (μ, σ^2) para que a distribuição fique completamente especificada. Como fazer isso?

- Podemos medir a altura de todos os alunos da UFV? Neste caso não é necessário usar Inferência Estatística!

Qual a distribuição da altura dos alunos da UFV? É razoável pensar num modelo Normal, a questão agora é identificar os parâmetros (μ, σ^2) para que a distribuição fique completamente especificada. Como fazer isso?

- Podemos medir a altura de todos os alunos da UFV? Neste caso não é necessário usar Inferência Estatística!
- Ou podemos escolher estrategicamente uma amostra (X_1, X_2, \dots, X_n) da população de alunos e através dessa amostra inferir sobre os parâmetros (μ, σ^2) da população. O resultado vai depender da qualidade da amostra e do processo de amostragem.

Esse é um problema básico da área de Estimação.

Testes de hipóteses

Suponha agora que desejamos saber se a média da altura dos alunos do Campus UFV - Florestal é maior que a dos alunos do Campus de Rio Paranaíba ($1,7m$)?

- Para tomarmos uma decisão, escolhemos estrategicamente uma amostra (X_1, X_2, \dots, X_n) da população de alunos do campus UFV - Florestal e através dessa amostra avaliamos se $\mu > 1,7m$ com alta probabilidade?

Esse é um problema básico de Testes de hipóteses.

Testes de hipóteses

Em geral, o problema enfrentado pelo cientista ou pesquisador não é tanto a estimação dos parâmetros populacionais, mas a formação de um procedimento com base em dados que possa produzir uma conclusão sobre algum sistema científico. Por exemplo:

- Um pesquisador da área médica pode decidir, com base em evidências experimentais, se ingerir café aumenta o risco de câncer;

Testes de hipóteses

Em geral, o problema enfrentado pelo cientista ou pesquisador não é tanto a estimação dos parâmetros populacionais, mas a formação de um procedimento com base em dados que possa produzir uma conclusão sobre algum sistema científico. Por exemplo:

- Um pesquisador da área médica pode decidir, com base em evidências experimentais, se ingerir café aumenta o risco de câncer;
- Um engenheiro pode ter de decidir, com base em dados amostrais, se há diferença na acurácia de dois medidores;

Testes de hipóteses

Em geral, o problema enfrentado pelo cientista ou pesquisador não é tanto a estimação dos parâmetros populacionais, mas a formação de um procedimento com base em dados que possa produzir uma conclusão sobre algum sistema científico. Por exemplo:

- Um pesquisador da área médica pode decidir, com base em evidências experimentais, se ingerir café aumenta o risco de câncer;
- Um engenheiro pode ter de decidir, com base em dados amostrais, se há diferença na acurácia de dois medidores;
- Um biólogo pode querer coletar dados para decidir se o tipo sanguíneo e cor dos olhos de uma pessoa são variáveis aleatórias independentes;

Testes de hipóteses

Em cada um desses casos, são feitas **conjecturas** sobre o problema. É a tomada de decisões deve ser realizada com base nos dados experimentais. Formalmente, em cada caso, a conjectura pode ser colocada na forma de hipótese estatística. Procedimentos que levam a rejeição ou não de hipóteses estatísticas compreendem a área de **Testes de hipóteses** que vamos relembrar a partir de agora.

Testes de hipóteses

Muitos problemas em engenharia requerem que decidamos qual das duas afirmações competitivas acerca do valor de algum parâmetro é verdadeira. As afirmações são chamadas de **hipóteses**, e o procedimento de tomada de decisão sobre a hipótese é chamado de **teste de hipóteses**. Esse é um dos mais úteis aspectos da inferência estatística, uma vez que muitos tipos de problemas de tomada de decisão, teste, ou experimentos no mundo da engenharia podem ser formulados como problemas de teste de hipóteses.

Exemplo prático (Montgomery e Runger (2016)):

Suponha que um engenheiro esteja projetando um sistema de escape da tripulação de uma aeronave, que consiste em um assento de ejeção e um motor de foguete que energiza o assento. O motor de foguete contém um propelente. Para o assento de ejeção funcionar apropriadamente, o propelente deve ter uma taxa mínima de queima de 50 cm/s. Se a taxa de queima for muito baixa, o assento de ejeção poderá não funcionar apropriadamente, levando a uma ejeção não segura. Taxas maiores de queima podem implicar instabilidade no propelente ou um assento de ejeção muito potente, levando outra vez a insegurança da injeção. Dessa maneira, a questão prática de engenharia que tem de ser respondida é: a taxa média de queima do propelente é igual a 50 cm/s ou é igual a algum outro valor (maior ou menor)?

Hipótese Estatística:

Uma hipótese estatística é uma afirmação sobre os parâmetros de uma ou mais populações.

Testes de hipóteses

Considere o sistema de escape da tripulação descrito no exemplo anterior. Suponha que estejamos interessados na taxa de queima do propelente sólido. Agora, a taxa de queima é uma variável aleatória que pode ser descrita por uma distribuição de probabilidades. Suponha que nosso interesse esteja focado na taxa média de queima (um parâmetro dessa distribuição). Especificamente, estamos interessados em decidir se a taxa média de queima é ou não 50 centímetros por segundo. Podemos expressar isso formalmente como:

$$H_0 : \mu = 50 \text{ cm/s} \quad (1)$$

$$H_1 : \mu \neq 50 \text{ cm/s}$$

Testes de hipóteses

A afirmação $H_0 : \mu = 50$ centímetros por segundo na Equação 1 é chamada de hipótese nula, e a afirmação $H_1 : \mu \neq 50$ centímetros por segundo é chamada de hipótese alternativa. Uma vez que a hipótese alternativa especifica valores de μ que poderiam ser maiores ou menores do que 50 centímetros por segundo, ela é chamada de hipótese alternativa bilateral.

Testes de hipóteses

A afirmação $H_0 : \mu = 50$ centímetros por segundo na Equação 1 é chamada de hipótese nula, e a afirmação $H_1 : \mu \neq 50$ centímetros por segundo é chamada de hipótese alternativa. Uma vez que a hipótese alternativa especifica valores de μ que poderiam ser maiores ou menores do que 50 centímetros por segundo, ela é chamada de hipótese alternativa bilateral.

Em algumas situações, podemos desejar formular uma hipótese alternativa unilateral, como em:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 50 \text{ cm/s} \\ H_1 : \mu > 50 \text{ cm/s} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_0 : \mu = 50 \text{ cm/s} \\ H_1 : \mu < 50 \text{ cm/s} \end{cases} \quad (2)$$

Testes de hipóteses

Sempre estabeleceremos a hipótese nula como uma reivindicação de igualdade. Entretanto, quando a hipótese alternativa for estabelecida com o sinal $<$, a reivindicação implícita na hipótese nula será \geq e quando a hipótese alternativa for estabelecida com o sinal $>$, a reivindicação implícita na hipótese nula será \leq .

Testes de hipóteses

É importante lembrar que hipóteses são sempre afirmações sobre a população ou distribuição sob estudo, não afirmações sobre a amostra. O valor do parâmetro especificado da população na hipótese nula (50 centímetros por segundo no exemplo anterior) é geralmente determinado em uma das três maneiras.

- 1 experiência passada, conhecimento do processo ou experimentos prévios. O objetivo nesse caso é determinar se o valor do parâmetro variou;

Testes de hipóteses

É importante lembrar que hipóteses são sempre afirmações sobre a população ou distribuição sob estudo, não afirmações sobre a amostra. O valor do parâmetro especificado da população na hipótese nula (50 centímetros por segundo no exemplo anterior) é geralmente determinado em uma das três maneiras.

- 1 experiência passada, conhecimento do processo ou experimentos prévios. O objetivo nesse caso é determinar se o valor do parâmetro variou;
- 2 alguma teoria ou modelo relativo ao processo sob estudo. Aqui, o objetivo do teste é verificar a teoria ou modelo;

Testes de hipóteses

É importante lembrar que hipóteses são sempre afirmações sobre a população ou distribuição sob estudo, não afirmações sobre a amostra. O valor do parâmetro especificado da população na hipótese nula (50 centímetros por segundo no exemplo anterior) é geralmente determinado em uma das três maneiras.

- 1 experiência passada, conhecimento do processo ou experimentos prévios. O objetivo nesse caso é determinar se o valor do parâmetro variou;
- 2 alguma teoria ou modelo relativo ao processo sob estudo. Aqui, o objetivo do teste é verificar a teoria ou modelo;
- 3 considerações externas, tais como projeto ou especificações de engenharia, ou a partir de obrigações contratuais. Nessa situação, o objetivo usual é avaliar a correção das especificações.

Teste de hipóteses se apoiam no uso de informações de uma amostra aleatória proveniente da população de interesse. É importante ressaltar que a verdade ou falsidade de uma hipótese particular pode nunca ser conhecida com certeza, a menos que possamos examinar a população inteira. Testar uma hipótese envolve:

- considerar uma amostra aleatória;

Teste de hipóteses se apoiam no uso de informações de uma amostra aleatória proveniente da população de interesse. É importante ressaltar que a verdade ou falsidade de uma hipótese particular pode nunca ser conhecida com certeza, a menos que possamos examinar a população inteira. Testar uma hipótese envolve:

- considerar uma amostra aleatória;
- computar uma estatística de teste a partir de dados amostrais

Teste de hipóteses se apoiam no uso de informações de uma amostra aleatória proveniente da população de interesse. É importante ressaltar que a verdade ou falsidade de uma hipótese particular pode nunca ser conhecida com certeza, a menos que possamos examinar a população inteira. Testar uma hipótese envolve:

- considerar uma amostra aleatória;
- computar uma estatística de teste a partir de dados amostrais
- e então usar a estatística de teste para tomar uma decisão a respeito da hipótese nula.

Testes de Hipóteses Estatísticas

A hipótese nula corresponde à taxa média de queima ser igual a 50 centímetros por segundo e a alternativa corresponde a essa taxa não ser igual a 50 centímetros por segundo. Ou seja, desejamos testar

$$H_0 : \mu = 50 \text{ cm/s} \quad \text{contra} \quad H_1 : \mu \neq 50 \text{ cm/s}$$

Suponha que uma amostra de $n = 10$ espécimes seja testada e que a taxa média \bar{x} seja observada. A média amostral é uma estimativa de μ . Um valor de \bar{x} que caia próximo a $\mu = 50 \text{ cm/s}$ é uma evidência de que μ é realmente 50 cm/s . Por outro lado, uma média amostral que seja consideravelmente diferente de 50 cm/s evidencia a validade da hipótese alternativa H_1 . Assim, a média amostral é a estatística de teste nesse caso.

Testes de hipóteses

A média amostral pode assumir muitos valores diferentes. Suponha que se $48,5 \leq \bar{x} \leq 51,5$, não rejeitaremos a hipótese nula $H_0 : \mu = 50$ e se $\bar{x} < 48,5$ ou $\bar{x} > 51,5$, rejeitaremos a hipótese nula em favor da hipótese alternativa $H_1 : \mu \neq 50$. Isso é ilustrado na Figura abaixo:

Testes de hipóteses

A média amostral pode assumir muitos valores diferentes. Suponha que se $48,5 \leq \bar{x} \leq 51,5$, não rejeitaremos a hipótese nula $H_0 : \mu = 50$ e se $\bar{x} < 48,5$ ou $\bar{x} > 51,5$, rejeitaremos a hipótese nula em favor da hipótese alternativa $H_1 : \mu \neq 50$. Isso é ilustrado na Figura abaixo:

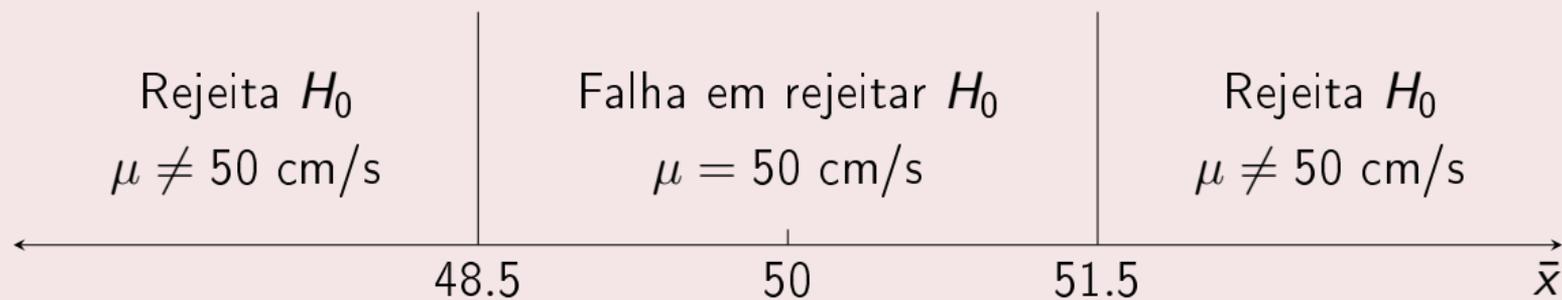


Figura: Critérios de decisão para testar $H_0 : \mu = 50$ cm/s versus $H_1 : \mu \neq 50$ cm/s.

Os valores de \bar{x} que forem menores do que 48,5 e maiores do que 51,5 constituem a **região crítica** para o teste, enquanto todos os valores que estejam no intervalo $48,5 \leq \bar{x} \leq 51,5$ formam uma região para a qual falharemos em rejeitar a hipótese nula. Por convenção, ela geralmente é chamada de **região de não rejeição**. Os limites entre as regiões críticas e a região de aceitação são chamados de valores críticos.

Em nosso exemplo, os valores críticos são 48,5 e 51,5. É comum estabelecer conclusões relativas à hipótese nula H_0 . Logo, rejeitaremos H_0 em favor de H_1 , se a estatística de teste cair na região crítica e falharmos em rejeitar H_0 por sua vez se a estatística de teste cair na região de aceitação.

Testes de hipóteses

Esse procedimento pode levar a duas conclusões erradas. Por exemplo, a taxa média verdadeira de queima do propelente poderia ser igual a 50 centímetros por segundo. Entretanto, para as amostras de propelente, selecionados aleatoriamente, que são testados, poderíamos observar um valor de estatística de teste \bar{x} que caísse na região crítica. Rejeitaríamos então a hipótese nula H_0 em favor da alternativa H_1 , quando, de fato, H_0 seria realmente verdadeira. Esse tipo de conclusão errada é chamado de **erro tipo I**.

Testes de hipóteses

Esse procedimento pode levar a duas conclusões erradas. Por exemplo, a taxa média verdadeira de queima do propelente poderia ser igual a 50 centímetros por segundo. Entretanto, para as amostras de propelente, selecionados aleatoriamente, que são testados, poderíamos observar um valor de estatística de teste \bar{x} que caísse na região crítica. Rejeitaríamos então a hipótese nula H_0 em favor da alternativa H_1 , quando, de fato, H_0 seria realmente verdadeira. Esse tipo de conclusão errada é chamado de **erro tipo I**.

Erro Tipo I

A rejeição da hipótese nula H_0 quando ela for verdadeira é definida como **erro tipo I**.

Agora, suponha que a taxa média verdadeira de queima seja diferente de 50 centímetros por segundo, mesmo que a média amostral \bar{x} caia na região de aceitação. Nesse caso, falharíamos em rejeitar H_0 , quando ela fosse falsa. Esse tipo de conclusão errada é chamado de **erro tipo II**.

Agora, suponha que a taxa média verdadeira de queima seja diferente de 50 centímetros por segundo, mesmo que a média amostral \bar{x} caia na região de aceitação. Nesse caso, falharíamos em rejeitar H_0 , quando ela fosse falsa. Esse tipo de conclusão errada é chamado de **erro tipo II**.

Erro Tipo II

A falha em rejeitar a hipótese nula, quando ela é falsa, é definida como **erro tipo II**.

Testes de hipóteses

Assim, testando qualquer hipótese estatística, quatro situações diferentes determinam se a decisão final está correta ou errada. Pelo fato de a nossa decisão estar baseada em variáveis aleatórias, probabilidades podem ser associadas aos erros tipo I e tipo II. A probabilidade de cometer o erro tipo I é denotada pela letra grega α .

| Decisão | H_0 é verdadeira | H_0 é falsa |
|-------------------|---|--|
| Não rejeita H_0 | Correta Probabilidade = $(1 - \alpha)$ | Erro Tipo II Probabilidade = β |
| Rejeita H_0 | Erro Tipo I Nível de significância α | Correta Poder = $(1 - \beta)$ |

A probabilidade do erro tipo I é chamada de **nível de significância**, ou **erro** α , ou **tamanho do teste**. No exemplo da taxa de queima de propelente, um **erro tipo I** ocorrerá quando $\bar{x} > 51,5$ ou $\bar{x} < 48,5$, quando a taxa média verdadeira de queima do propelente for $\mu = 50$ cm/s.

Suponha que o desvio-padrão da taxa de queima seja $\sigma = 2,5$ centímetros por segundo e que a taxa de queima tenha uma distribuição para a qual as condições do **teorema central do limite** se aplicam; logo, a distribuição da média amostral é aproximadamente normal, com média $\mu = 50$ e desvio-padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2.5}{\sqrt{10}} = 0.79$.

Testes de hipóteses

A probabilidade de cometer o **erro tipo I** (ou o nível de significância de nosso teste) é igual à soma das áreas sombreadas nas extremidades da distribuição normal na Figura abaixo:

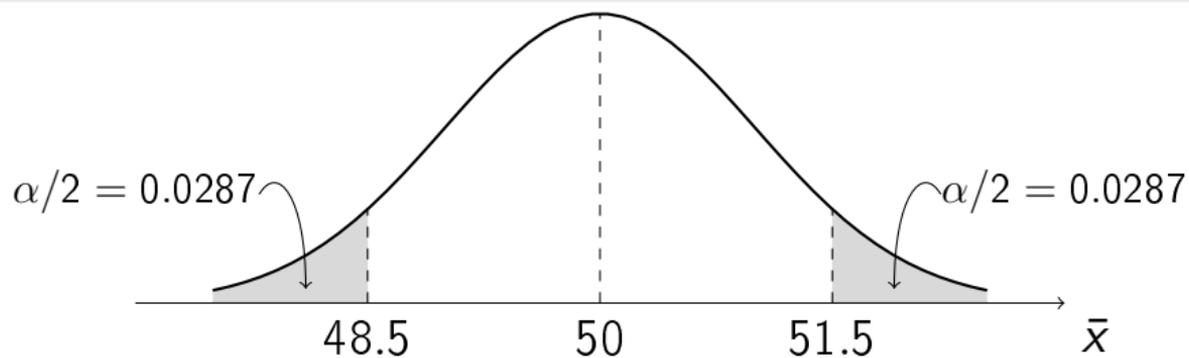


Figura: Região crítica para $H_0 : \mu = 50$ versus $H_1 : \mu \neq 50$ e $n = 10$

Testes de hipóteses

A probabilidade de cometer o **erro tipo I** (ou o nível de significância de nosso teste) é igual à soma das áreas sombreadas nas extremidades da distribuição normal na Figura abaixo:

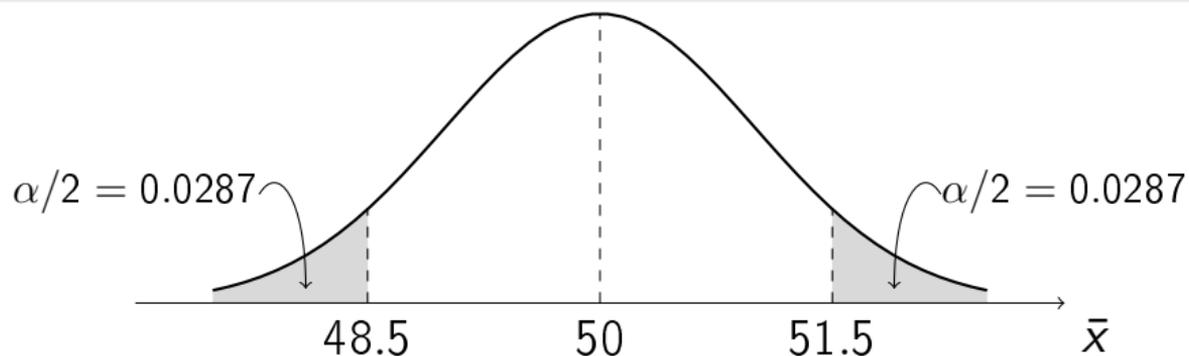


Figura: Região crítica para $H_0 : \mu = 50$ versus $H_1 : \mu \neq 50$ e $n = 10$

$$\alpha = P(\bar{X} < 48.5 \text{ quando } \mu = 50) + P(\bar{X} > 51.5 \text{ quando } \mu = 50).$$

Os valores de z que correspondem aos valores críticos 48,5 e 51,5 são

$$z_1 = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{48.5 - 50}{0.79} = -1.9 \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{51.5 - 50}{0.79} = 1.9$$

Logo,

$$\alpha = P(z < -1.90) + P(z > 1.90) = 0.0287 + 0.0287 = 0.0574$$

Essa é a probabilidade do erro tipo I. Isso implica que 5,74% de todas as amostras aleatórias conduziram à rejeição da hipótese $H_0 : \mu = 50$ cm/s, quando a taxa média verdadeira de queima fosse realmente 50 centímetros por segundo. Da inspeção da Figura anterior, notamos que podemos reduzir α alargando a região de aceitação.

D. C. Montgomery e G. C. Runger. *Estatística Aplicada E Probabilidade Para Engenheiros*. Grupo Gen-LTC, São Paulo, 6 edition, 2016.