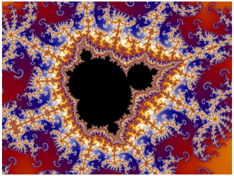
Das Geheimnis der Zahl 5

Ingo Blechschmidt
iblech@speicherleck.de

Pizzaseminar in Mathematik
Universität Augsburg

21. Oktober 2016

Gewidmet an Prof. Dr. Jost-Hinrich Eschenburg.




Hippasos
2
10
5
8

Gliederung

1. Ein Entwurfsmuster der Natur
2. Kettenbrüche
   - Beispiele
   - Berechnung der Kettenbruchentwicklung
   - Bestapproximationen durch die Kettenbruchentwicklung
3. Approximationen von π
4. Das Mandelbrot-Fraktal
5. Spiralen in der Natur
6. Die Ananas aus SpongeBob Schwammkopf

Ein Entwurfsmuster der Natur

Ein Entwurfsmuster der Natur

Fibonaccizahlen:

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

Die Anzahl Spiralen auf einer Sonnenblume ist stets eine Fibonaccizahl (oder eine Zahl, die sehr nah an einer Fibonaccizahl ist). Etwa waren im Foto auf der vorherigen Folie 21 Spiralen im Uhrzeigersinn und 34 Spiralen im Gegenuhrzeigersinn sichtbar. Wieso bloß?

Ein merkwürdiger Bruch

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = ?$$

Ein merkwürdiger Bruch

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = ?$$

Entscheidende Beobachtung: Wenn wir

$$x := ? - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

Ein merkwürdiger Bruch

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = ?$$

Entscheidende Beobachtung: Wenn wir

$$x := ? - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

setzen, gilt

$$\frac{1}{2 + x} = x.$$

Ein merkwürdiger Bruch

Entscheidende Beobachtung: Wenn wir

$$x := ? - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

setzen, gilt

$$\frac{1}{2 + x} = x.$$

Ein merkwürdiger Bruch

Entscheidende Beobachtung: Wenn wir

$$x := ? - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

setzen, gilt

$$\frac{1}{2 + x} = x.$$

Multiplizieren mit dem Nenner liefert $1 = x \cdot (2 + x)$,

Ein merkwürdiger Bruch

Entscheidende Beobachtung: Wenn wir

$$x := ? - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

setzen, gilt

$$\frac{1}{2 + x} = x.$$

Multiplizieren mit dem Nenner liefert $1 = 2x + x^2$,

Ein merkwürdiger Bruch

Entscheidende Beobachtung: Wenn wir

$$x := ? - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

setzen, gilt

$$\frac{1}{2 + x} = x.$$

Multiplizieren mit dem Nenner liefert $1 = 2x + x^2$, also müssen wir nur die quadratische Gleichung $0 = x^2 + 2x - 1$ lösen,

Ein merkwürdiger Bruch

Entscheidende Beobachtung: Wenn wir

$$x := ? - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

setzen, gilt

$$\frac{1}{2 + x} = x.$$

Multiplizieren mit dem Nenner liefert $1 = 2x + x^2$, also müssen wir nur die quadratische Gleichung $0 = x^2 + 2x - 1$ lösen, somit

$$x = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2} \quad \text{oder} \quad x = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}.$$

Es ist die positive Möglichkeit.

Weitere Beispiele

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}=\sqrt{2}$$

$$2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}=\sqrt{5}$$

$$3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\ddots}}}=\sqrt{10}$$

Weitere Beispiele

$$[1; 2, 2, 2, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = \sqrt{2}$$

$$[2; 4, 4, 4, \ldots] = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}} = \sqrt{5}$$

$$[3; 6, 6, 6, \ldots] = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}} = \sqrt{10}$$

Weitere Beispiele

1. $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots]$
2. $\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \dots]$
3. $\sqrt{10} = [3; 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, \dots]$
4. $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$
5. $\sqrt{6} = [2; 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \dots]$
6. $\sqrt{14} = [3; 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, \dots]$
7. $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots]$

$$= 2{,}718\,281\,8284\,590\,452\,3536\dots$$

Die Ziffern der Zahl $e = 2{,}7182818284\ldots$, der Basis des natürlichen Logarithmus, bilden kein erkennbares Muster. Aber die Kettenbruchentwicklung ist völlig regelmäßig (und das kann man auch beweisen).

Der euklidische Algorithmus

Zur Erinnerung: $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} = 1{,}41421356\ldots$

$$\begin{aligned}
1{,}41421356\ldots &= 1 \cdot 1{,}00000000\ldots + 0{,}41421356\ldots \\
1{,}00000000\ldots &= 2 \cdot 0{,}41421356\ldots + 0{,}17157287\ldots \\
0{,}41421356\ldots &= 2 \cdot 0{,}17157287\ldots + 0{,}07106781\ldots \\
0{,}17157287\ldots &= 2 \cdot 0{,}07106781\ldots + 0{,}02943725\ldots \\
0{,}07106781\ldots &= 2 \cdot 0{,}02943725\ldots + 0{,}01219330\ldots \\
0{,}02943725\ldots &= 2 \cdot 0{,}01219330\ldots + 0{,}00505063\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die Rechnung auf der vorherigen Folie setzt voraus, dass man die Ziffern von $\sqrt{2}$ schon hinreichend genau kennt. Aber auch, wenn das nicht der Fall ist, kann man den euklidischen Algorithmus verwenden. Lediglich die Darstellung wird komplizierter – man rechnet dann mit lauter Termen, in denen $\sqrt{2}$ vorkommt.

Es gibt sogar eine geometrische Möglichkeit, um einzusehen, dass der jeweils kleinere Rest immer zweimal in den jeweils größeren Rest passt.

Wieso liefert der euklidische Algorithmus die Koeffizienten der Kettenbruchentwicklung? Um das einzusehen, schreiben wir

$$\begin{aligned} x &= a_0 \cdot 1 \ + r_0 \\ 1 &= a_1 \cdot r_0 + r_1 \\ r_0 &= a_2 \cdot r_1 + r_2 \\ r_1 &= a_3 \cdot r_2 + r_3 \end{aligned}$$

und so weiter. Dabei sind die Zahlen a_n natürliche Zahlen und die Reste r_n sind jeweils kleiner als der zweite Faktor des jeweiligen nebenstehenden Produkts. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x &= a_0 + r_0 = a_0 + 1/(1/r_0) \\ &= a_0 + 1/(a_1 + r_1/r_0) = a_0 + 1/(a_1 + 1/(r_0/r_1)) \\ &= a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + r_2/r_1)) = \cdots \end{aligned}$$

In der wunderschönen Programmiersprache Haskell ist der Code, um die unendliche Kettenbruchentwicklung zu berechnen, nur eine Zeile lang (die Typdeklaration ist optional):

```
cf :: Double -> [Integer]
cf x = a : cf (1 / (x - fromIntegral a)) where a = floor x
```

Die Kettenbruchentwicklung einer Zahl x beginnt also mit a, dem ganzzahligen Anteil von x, und geht dann mit der Kettenbruchentwicklung von $1/(x-a)$ weiter.

Wegen Rundungsfehlern kann man sich nur auf die ersten paar Terme der Entwicklung verlassen. Zum Beispiel könnte `cf (sqrt 6)` folgendes Ergebnis liefern:

`[2,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,4,2,2,1,48,2,4,6,1,...]`.

Wir vom Curry Club Augsburg werden in den nächsten Wochen im OpenLab einen kostenlosen Haskell-Workshop veranstalten.

Curry Club AUGSBURG

:: ((a, u) → x) → a → u → x


Haskell?
Yeah, I use it to program our starship.

Bestapproximationen durch Kettenbrüche

Theorem

Wenn man die Kettenbruchentwicklung einer Zahl x abschneidet, erhält man einen Bruch a/b, der unter allen Brüchen mit Nenner $\leq b$ der Zahl x am nächsten liegt.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} \rightsquigarrow 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12} \approx 1{,}42$$

Bestapproximationen durch Kettenbrüche

Theorem

Wenn man die Kettenbruchentwicklung einer Zahl x abschneidet, erhält man einen Bruch a/b, der unter allen Brüchen mit Nenner $\leq b$ der Zahl x am nächsten liegt.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} \rightsquigarrow 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12} \approx 1{,}42$$

Bonus. Je größer der Koeffizient nach der Abschneidestelle ist, desto besser ist die Näherung a/b.

Präziser formuliert besagt der Zusatz, dass die Entfernung von x zu a/b kleiner als $1/(a_n a_{n+1})$ ist, wobei a_n der letzte Koeffizient unmittelbar vor der Abschneidestelle und a_{n+1} der erste Koeffizient direkt danach ist.

Liebe ist wichtig.

♡

Pi ist wichtig.

π

Approximationen von π

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ddots}}}}$$

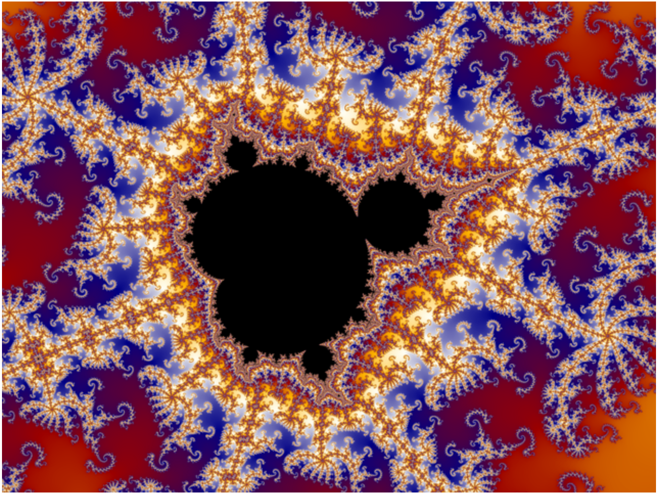
1. 3
2. $[3; 7] = 22/7 = \underline{3{,}14}28571428\ldots$
3. $[3; 7, 15] = 333/106 = \underline{3{,}1415}094339\ldots$
4. $[3; 7, 15, 1] = 355/113 = \underline{3{,}141592}9203\ldots$ (Milü)

Man weiß natürlich nicht mit Sicherheit, wie in der Antike Näherungen für π berechnet wurden. Vorstellbar ist aber, dass eine Form des euklidischen Algorithmus eingesetzt wurde (natürlich nicht mit Dezimalbrüchen notiert, sondern zum Beispiel mit Schnüren unterschiedlicher Längen durchgeführt).

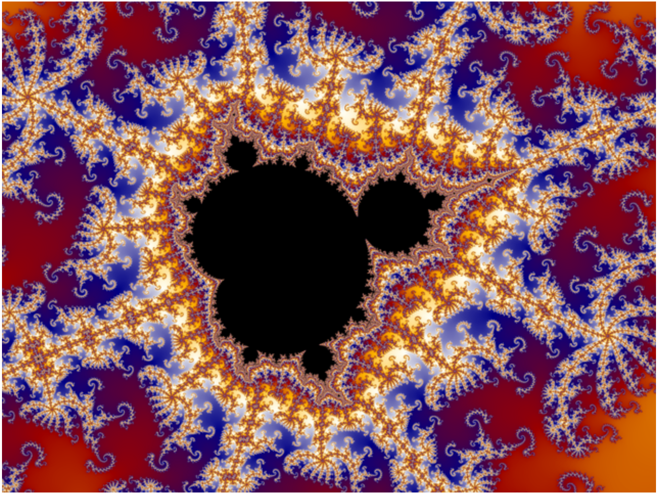
Weil der Koeffizient 292 in der Kettenbruchentwicklung von π exzeptionell groß ist, ist die Approximation $355/113$ exzeptionell gut. Das ist ein schöner mathematischer Zufall! Mir gefällt die Vorstellung, dass bessere Approximationen in der Antike nicht berechenbar waren, aber dass dank dieses Zufalls die beste noch zugängliche Approximation tatsächlich eine außerordentlich gute war. Insbesondere ist sie viel besser, als der Nenner 113 vermuten lassen würde.

NB: Die Näherung $355/113$ kann man sich leicht einprägen (11–33–55).

Das Mandelbrot-Fraktal



Das Mandelbrot-Fraktal



Im Mandelbrot-Fraktal tauchen die Fibonaccizahlen auf.

Eine Erklärung, wo und weshalb die Fibonaccizahlen im Mandelbrot-Fraktal auftreten, steht auf `http://math.bu.edu/DYSYS/FRACGEOM2/node7.html`.
Mit dem freien Programm XaoS kann man interaktiv das Mandelbrot-Fraktal (und weitere Fraktale) erkunden.

Spiralen in der Natur

Die irrationalste aller Zahlen

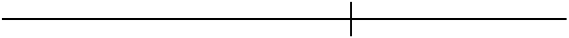
Der optimale Winkel für aufeinanderfolgende Samen ist weder

$$90^\circ = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ \qquad \text{noch} \qquad 45^\circ = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ.$$

Der optimale Winkel für aufeinanderfolgende Samen ist weder

$$90^\circ = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ \qquad \text{noch} \qquad 45^\circ = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ.$$

Stattdessen ist er der **goldene Winkel** $\Phi \cdot 360^\circ \approx 582^\circ$ (äqv.: 138°):



$$\Phi = \textbf{goldener Schnitt} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$$

Theorem

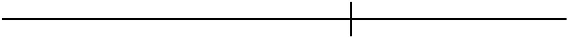
Der goldene Schnitt Φ ist die ***irrationalste aller Zahlen****.*

Die irrationalste aller Zahlen

Der optimale Winkel für aufeinanderfolgende Samen ist weder

$$90^\circ = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ \qquad \text{noch} \qquad 45^\circ = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ.$$

Stattdessen ist er der **goldene Winkel** $\Phi \cdot 360^\circ \approx 582^\circ$ (äqv.: 138°):



$$\Phi = \textbf{goldener Schnitt} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$$

Theorem

*Der goldene Schnitt Φ ist die **irrationalste aller Zahlen**.*

Beweis. $\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$.

Der goldene Schnitt kommt an vielen Stellen in Natur und Kunst vor. Wenn man eine Strecke im goldenen Schnitt teilt, so wird das längere Teilstück genau Φ mal so groß sein wie das kleinere Teilstück. Konzeptioneller:

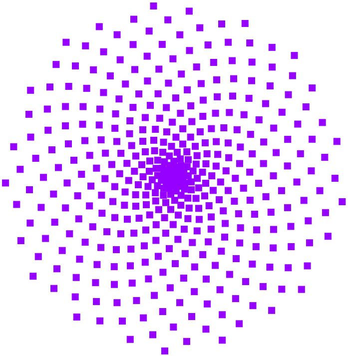
$$\text{Gesamtstrecke} : \text{längeres Teilstück} = \text{längeres Teilstück} : \text{kürzeres Teilstück}.$$

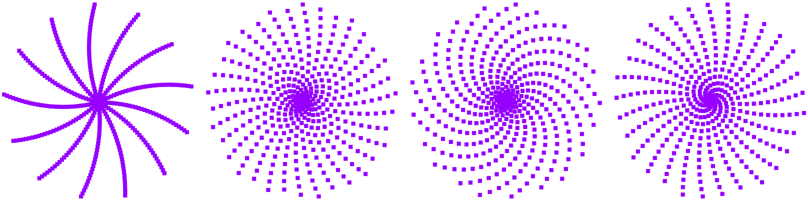
Wenn man einen Bruchanteil $\frac{a}{b}$ des Vollkreises als Drehwinkel verwendet, ist man nach b Umdrehungen wieder am Ausgangsort angelangt. Das ist schlecht! So vergeudet man Platz.

Es ist besser, einen Anteil des Vollkreises zu nehmen, der *nicht* als Bruchzahl ausgedrückt werden kann – eine *irrationale Zahl*. Von allen irrationalen Zahlen sollte man die wählen, die *am irrationalsten* ist.

Eine Zahl lässt sich umso besser durch Brüche approximieren, je größer die Koeffizienten in der Kettenbruchentwicklung sind. Bei Φ sind die Koeffizienten dagegen so klein wie nur möglich. Das ist der Grund, wieso Φ die „irrationalste" Zahl ist. Sie ist von allen Zahlen die, die sich am schwersten durch Brüche annähern lässt.

(Nicht-)Verwendung des goldenen Winkels





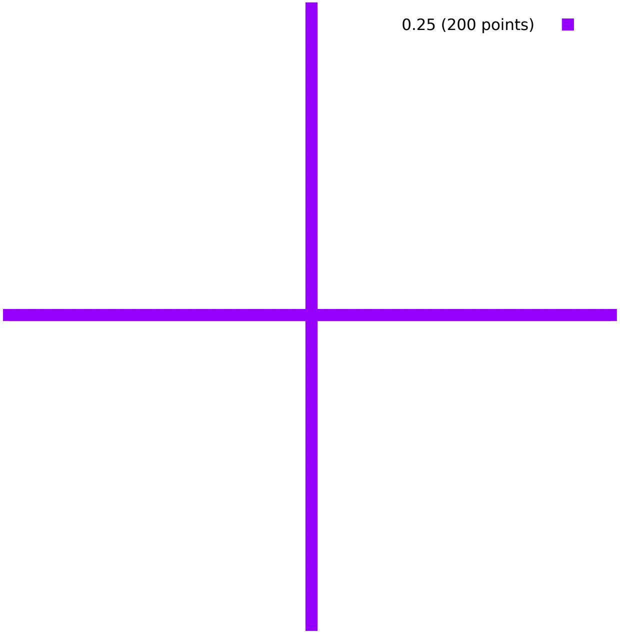
In der oberen Abbildung wurde der goldene Winkel verwendet. Die Winkel in den anderen vier Abbildungen waren dagegen:

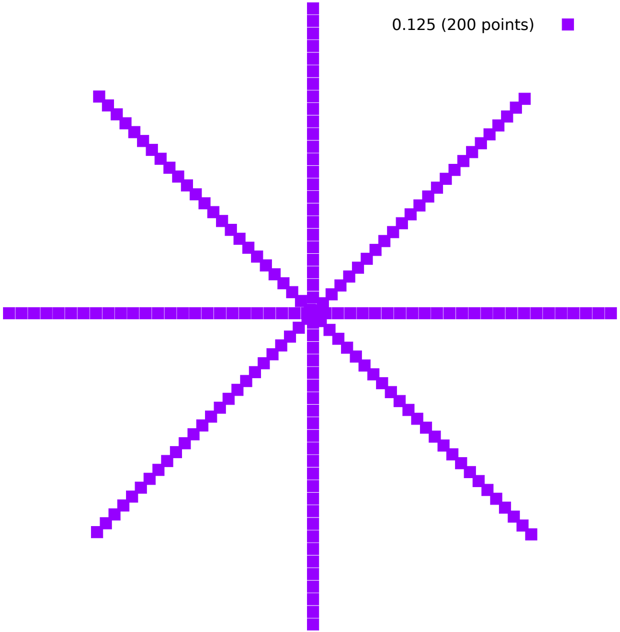
1. goldener Winkel $- 1^\circ$
2. goldener Winkel $- 0{,}1^\circ$
3. goldener Winkel $+ 0{,}1^\circ$
4. goldener Winkel $+ 1^\circ$

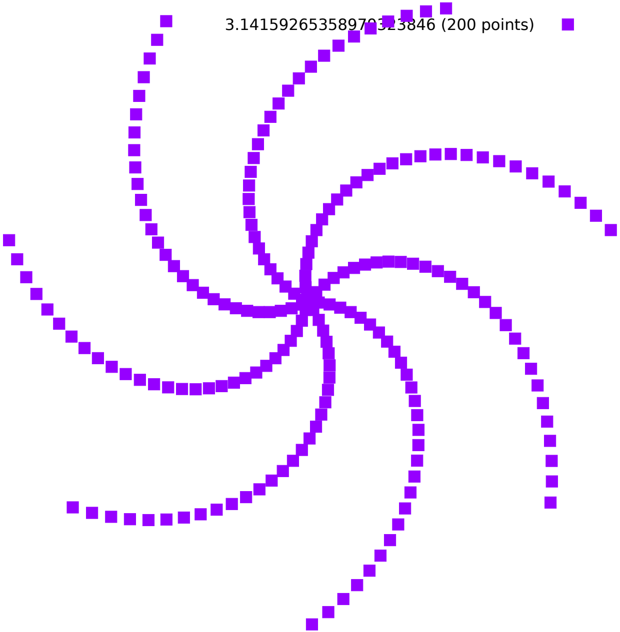
Der Code, der diese Abbildungen erzeugt hat, ist online unter `https://github.com/iblech/number5`. Probiere doch deine Lieblingszahlen als Drehwinkel aus!

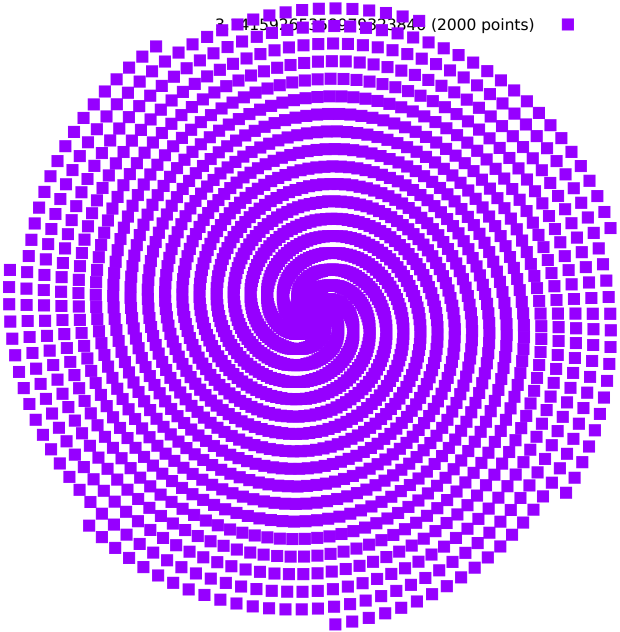
Du bist herzlich eingeladen, eine tolle interaktive JavaScript/Canvas-Demo zu schreiben. Verwende die folgenden einfachen Formeln, um bei einem Drehwinkel φ die Koordinaten des n-ten Punkts zu berechnen (die Einheiten sind so, dass $\varphi = 1/4$ den Winkel 90° bedeutet).

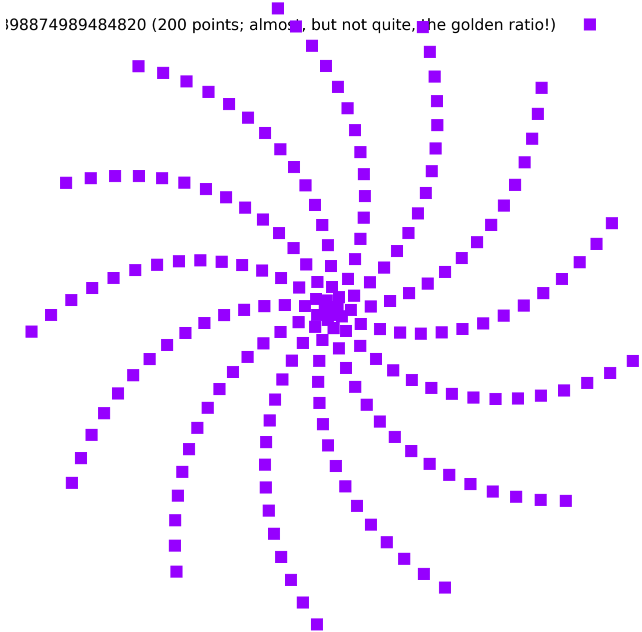
$$x = n \cdot \cos(2\pi\varphi \cdot n)$$
$$y = n \cdot \sin(2\pi\varphi \cdot n)$$

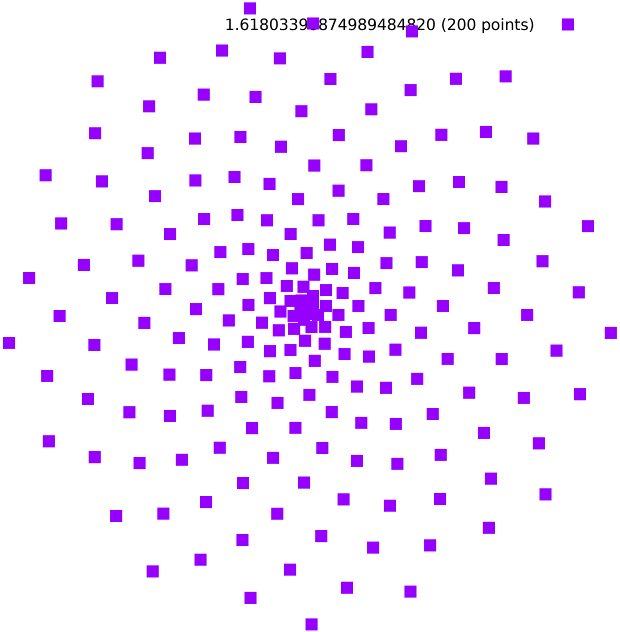

0.25 (200 points)

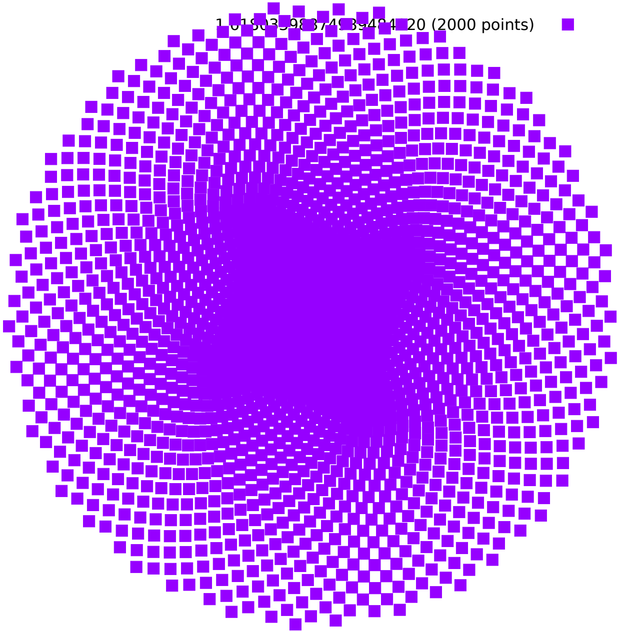

0.125 (200 points)


3.14159265358979323846 (200 points)


(2000 points)


98874989484820 (200 points; almo t, but not quite, he golden ratio!)


1.618033988749894820 (200 points)


20 (2000 points)

Wieso die Fibonaccizahlen?

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

1. $1 \quad = \quad 1/1$
2. $[1; 1] \quad = \quad 2/1$
3. $[1; 1, 1]$

Wieso die Fibonaccizahlen?

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

1. $1 = 1/1$
2. $[1;1] = 2/1$
3. $[1;1,1] = 3/2$
4. $[1;1,1,1]$

Wieso die Fibonaccizahlen?

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

1. $1 \quad = \quad 1/1$
2. $[1; 1] \quad = \quad 2/1$
3. $[1; 1, 1] \quad = \quad 3/2$
4. $[1; 1, 1, 1] \quad = \quad 5/3$
5. $[1; 1, 1, 1, 1]$

Wieso die Fibonaccizahlen?

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

1. $1 = 1/1$
2. $[1; 1] = 2/1$
3. $[1; 1, 1] = 3/2$
4. $[1; 1, 1, 1] = 5/3$
5. $[1; 1, 1, 1, 1] = 8/5$

Wieso die Fibonaccizahlen?

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

1. $1 = 1/1$
2. $[1;1] = 2/1$
3. $[1;1,1] = 3/2$
4. $[1;1,1,1] = 5/3$
5. $[1;1,1,1,1] = 8/5$
6. $[1;1,1,1,1,1] = 13/8$
7. $[1;1,1,1,1,1,1] = 21/13$
8. $[1;1,1,1,1,1,1,1] = 34/21$
9. $[1;1,1,1,1,1,1,1,1] = 55/34$

Wählt man als Drehwinkel den Anteil $\frac{a}{b}$ des Vollkreises (vollständig gekürzt), so erhält man exakt b Spiralen. Die Animation auf

`https://rawgit.com/iblech/number5/master/drehwinkel-0_3027522935779816.mp4`

zeigt einen Zoom bei Verwendung von $33/109 \cdot 360°$ als Drehwinkel. Die Kettenbruchentwicklung ist

$$\frac{33}{109} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{3}}}}$$

mit Abschneidungen

$$\frac{1}{3}, \qquad \cfrac{1}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{10}, \qquad \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{3}}} = \frac{10}{33}.$$

Daher sieht man zunächst drei, dann zehn, dann 33 und schließlich 109 Spiralen.

Die Ananas aus SpongeBob Schwammkopf

Von Vi Hart, Mathemusikerin.

Vi Hart hat ein Video mit dem Titel *Open Letter to Nickelodeon, Re: SpongeBob's Pineapple under the Sea* auf YouTube: `https://www.youtube.com/watch?v=gBxeju8dMho`

Lust auf Übungsaufgaben zum Thema?

`https://rawgit.com/iblech/number5/master/pizzaseminar-de.pdf`

Aufgabe 12 erklärt die Verbindung zwischen dem goldenen Schnitt und der Zahl 5.

♡

Bildquellen

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/99/Vi_Hart.jpg
http://joachim-reichel.org/software/fraktal/mandelbrot_large.png
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bellis_perennis_white_(aka).jpg
http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/coneflower.jpg (Tim Stone)
http://www.bibliotecapleyades.net/imagenes_ciencia2/conscious_universe472_02.jpg
http://www.education.txstate.edu/ci/faculty/dickinson/PBI/PBIFall06/GeoNature/Content/Fibonacci_Lesson_files/image037.gif
http://www.presse.uni-augsburg.de/bilder/fotos_downl_pr/archiv1/Eschenburg-Tafel.jpg
http://www.presse.uni-augsburg.de/bilder/fotos_downl_pr/archiv1/Eschenburg-Zapfen-64745753348_thumb.jpg
http://www.sciencedump.com/sites/default/files/styles/article_width/public/field/gallery/8247962.jpg