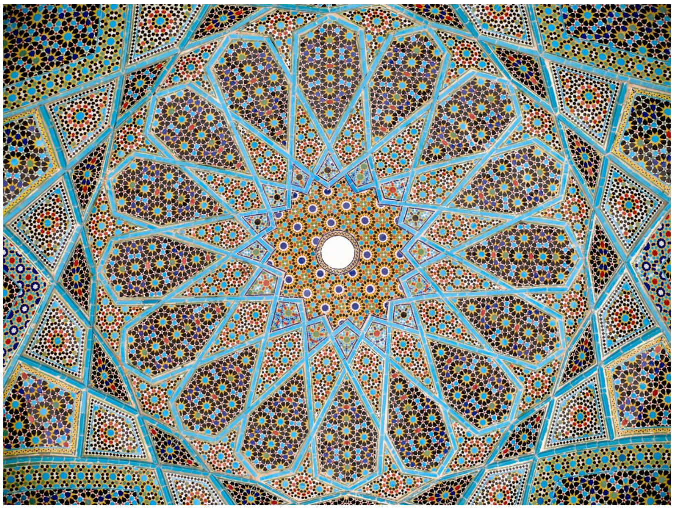
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
Ingo Blechschmidt

Pizzaseminar in Mathematik
Das Geheimnis der Zahl 5



Grab des Hafis in Shiras (Iran); Foto von Pentocelo (CC-lizensiert)

Die *Folge der Fibonacci-Zahlen* beginnt mit

$$f_0 := 1, \quad f_1 := 1, \quad f_2 := 2, \quad f_3 := 3, \quad f_4 := 5, \quad f_5 := 8.$$

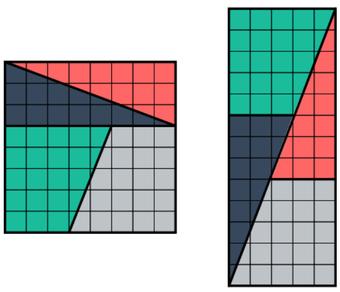
Für $n \geq 1$ gilt also $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Der *goldene Schnitt* ist die Zahl $\Phi := (1 + \sqrt{5})/2$.

Aufgabe 1. *Ein Kästchen verschwindet!*

Die beiden Figuren bestehen offensichtlich aus denselben Stücken, haben aber unterschiedlichen Flächeninhalt!

a) Was ist passiert?

b) Was hat das mit Approximationen durch Kettenbrüche zu tun? Welche mit dem goldenen Schnitt sehr eng verwandte Zahl spielt hier eine Rolle?

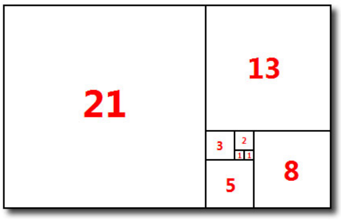


Aufgabe 2. *Die Quadrate der Fibonacci-Zahlen*

Es gilt die Identität $f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

a) Führe einen Induktionsbeweis.

b) Argumentiere, wieso folgende Skizze die Behauptung auch schon beweist.



Aufgabe 3. *Von Fibonacci-Zahlen und Rechtecken*

Gegeben sei eine Reihe von n Quadraten, die ein $(1 \times n)$-Rechteck bilden. Wir möchten dieses Rechteck mit Monominos, also (1×1)-Rechtecken, sowie Dominos, (1×2)-Rechtecken, überdecken.

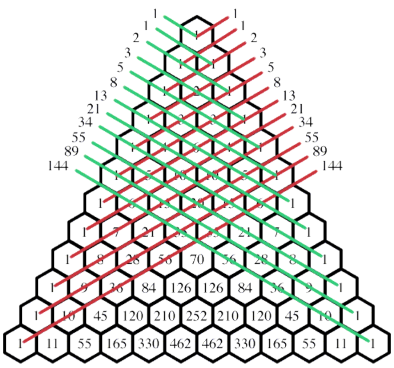
Zeige, dass die Anzahl von möglichen Überdeckungen des $(1 \times n)$-Rechtecks mittels Monominos und Dominos gleich f_n ist.

Aufgabe 4. *Ein naiver Algorithmus für Fibonacci-Zahlen*

Eine ganz naive Methode, die n-te Fibonacci-Zahl zu bestimmen, besteht darin, die beiden Vorgänger zu bestimmen und dann zu summieren. Wie viele Rechenschritte sind dabei notwendig, wenn man sich Zwischenergebnisse *nicht* merkt und daher viele Fibonacci-Zahlen immer wieder berechnet?

Aufgabe 5. *Fibonacci-Zahlen im Pascalschen Dreieck*

Im Pascalschen Dreieck verbergen sich die Fibonacci-Zahlen wie angedeutet. Beweise das!



Aufgabe 6. *Ein Lemma über goldene Dreiecke*

a) Zeige: In einem gleichschenkligen Dreieck mit den Innenwinkeln 72°, 36° und 72° teilen die langen Seiten die Grundseite im goldenen Schnitt.

b) Beweise damit folgende Pentagon-Dekagon-Hexagon-Identität: Seien ein reguläres Pentagon, ein reguläres Dekagon und ein reguläres Hexagon in einem Kreis einbeschrieben. Dann gilt für die Kantenlängen P, D bzw. H die Identität $P^2 = D^2 + H^2$.

Aufgabe 7. *Ikosaeder und Dodekaeder*

Sei einem regelmäßigen Ikosaeder ein regelmäßiges Dodekaeder einbeschrieben (Seitenflächenmittelpunkte auf Ecken). Zeige, dass das Verhältnis der Kantenlängen beider Objekte gleich $3 : \Phi$ ist.

Aufgabe 8. *Kettenbruchentwicklung des goldenen Schnitts*

a) Zeige: $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$. Bonuspunkte gibt es, wenn du diese Identität allein mit der geometrischen Definition des goldenen Schnitts nachweist: Die Gesamtstrecke verhält sich zur größeren Teilstrecke wie die größere Teilstrecke zu kleineren.

b) Folgere:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

c) Zeige: Die sukzessiven Approximationen des goldenen Schnitts, die sich durch Abschneidung der Kettenbruchentwicklung ergeben, sind von der Form f_{n+1}/f_n.

Aufgabe 9. *Ableitung vs. Umkehrfunktion*

Finde eine bijektive differenzierbare Funktion $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, deren Ableitung gleich ihrer Umkehrfunktion ist.

Tipp: Versuche es mit dem Ansatz $x \mapsto x^a$.

Aufgabe 10. *Beispiele für Kettenbruchentwicklungen*

a) Bestätige, dass $\sqrt{2} = [1; 2, 2, \ldots]$.

b) Bestätige, dass $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$.

c) Was ist die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{5}$?

d) Mach dir kurz klar: Jede reelle Zahl ist Lösung irgendeiner quadratischen Gleichung.

e) Zeige: Jede Zahl mit periodischer Kettenbruchentwicklung ist Lösung einer gewissen quadratischen Gleichung *mit rationalen Koeffizienten.*

Aufgabe 11. *Kettenbruckentwicklung durch den euklidischen Algorithmus*

Sei x eine nichtnegative reelle Zahl. Der euklidische Algorithmus produziere folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= a_0 \cdot 1 \ + r_0 \\ 1 &= a_1 \cdot r_0 + r_1 \\ r_0 &= a_2 \cdot r_1 + r_2 \\ r_1 &= a_3 \cdot r_2 + r_3 \\ r_2 &= a_4 \cdot r_3 + r_4 \end{aligned}$$

Und so weiter. Die Zahlen a_n sind also nichtnegative ganze Zahlen und die Reste r_n sind jeweils kleiner als der zweite Faktor des nebenstehenden Produkts. Zeige:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Aufgabe 12. *Die Entdeckung der Irrationalität*

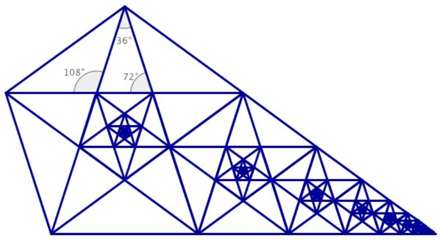
Als Entdecker der Irrationalität gilt der griechische Mathematiker Hippasos von Metapont. Er erkannte, dass der *goldene Schnitt* irrational ist. Damit erschütterte er die Schule der Pythagoreer, denn diese waren von dem Kredo *Alles ist Zahl* überzeugt, wobei sie mit „Zahl“ *rationale Zahl* meinten. Ironischerweise kam der goldene Schnitt auch noch im Erkennungszeichen der Pythagoreer vor, dem Pentagramm. In dieser Aufgabe möchten wir uns auf Metaponts Spuren begeben.

a) Sei x eine rationale Zahl. Zeige, dass die Anwendung des euklidischen Algorithmus auf x (wie in der vorherigen Aufgabe beschrieben) *terminiert*, das heißt nach einer gewissen endlichen Anzahl von Schritten den Rest Null liefert.

b) Folgere: Die Kettenbruchentwicklung einer rationalen Zahl ist stets endlich.

c) Verwende folgende Figur, um rein geometrisch einzusehen, dass der euklidische Algorithmus beim goldenen Schnitt als Startwert *nicht* terminiert. Somit ist der goldene Schnitt irrational.

d) Halte die Augen offen, wann das Buch *Sternstunden der Mathematik* von Jost-Hinrich Eschenburg erscheint, das diese Station der Geschichte und viele weitere genauer beleuchtet. Der Vorentwurf steht im Digicampus. Es wird ein rundum schönes Buch!



Aufgabe 13. *Zahlentheoretische Irrationalitätsbeweise*

a) Zeige, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, in dem du die Annahme, es gäbe ganze Zahlen a und b mit $\sqrt{2} = a/b$, zu einem Widerspruch führst. Bonuspunkte gibt es, wenn du in deinem Beweis nicht ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen musst, dass der Bruch a/b vollständig gekürzt ist.

b) Zeige nach demselben Muster, dass Φ irrational ist. Nutze die Identität $\Phi = 1 + 1/\Phi$.

Aufgabe* 14. *Rekursionsformel für die Kettenbruchapproximationen*

Sei ein unendlicher Kettenbruch der Form

$$[c_0; c_1, c_2, \ldots] = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

gegeben. Wenn man diesen sukzessive abschneidet, erhält man die Approximationen

$$c_0, \qquad c_0 + \frac{1}{c_1} = \frac{c_0 c_1 + 1}{c_1}, \qquad c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2}} = \frac{c_0 c_1 c_2 + c_0 + c_2}{c_1 c_2 + 1}$$

und so weiter. Wir definieren rekursiv Folgen $A_{-1}, A_0, \ldots$ und $B_{-1}, B_0, \ldots$:

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 1 & B_{-1} &= 0 \\ A_0 &= c_0 & B_0 &= 1 \\ A_{n+1} &= c_{n+1} A_n + A_{n-1} & B_{n+1} &= c_{n+1} B_n + B_{n-1} \end{aligned}$$

Zeige für alle $n \geq 0$: Der Bruch, der sich durch Abschneidung nach Stelle n ergibt, ist A_n/B_n.

Tipp: Versuche einen Induktionsbeweis. Verwende im Induktionsschritt die zentrale Einsicht, dass der Kettenbruch $[c_0; c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}]$ gleich dem um ein Glied kürzeren Kettenbruch $[c_0; c_1, \ldots, c_n + 1/c_{n+1}]$ ist.

Aufgabe 15. *Unkürzbarkeit der Kettenbruchapproximationen*

Wie in Aufgabe 14 schreiben wir „A_n/B_n" für den Bruch, der sich ergibt, wenn man die Kettenbruchentwicklung einer gegebenen Zahl abschneidet. In dieser Aufgabe möchten wir zeigen, dass dieser Bruch stets schon gekürzt ist.

a) Seien a und b zwei ganze Zahlen. Wieso sind a und b zueinander teilerfremd, wenn es weitere ganze Zahlen p und q mit $1 = pa + qb$ gibt?

b) Zeige für alle $n \geq 0$: $A_{n+1} B_n - B_{n+1} A_n = (-1)^n$.

c) Ziehe das Fazit.

Aufgabe* 16. *Conways Armee*

Ein unendlich ausgedehntes Damebrett sei in zwei Hälften zerteilt. Im unteren Teil darf man beliebig viele Damesteine platzieren. Ziel des Spiels ist es, einen Damestein möglichst hoch in das obere Spielfeld zu bringen. Dabei darf nur folgender Spielzug angewendet werden: Ein Stein darf einen (horizontal oder vertikal) benachbarten Stein überspringen, wenn das Zielfeld unbesetzt ist. Der übersprungene Stein wird dann aus dem Spiel entfernt.

a) Überzeuge dich davon, dass man, um Höhe 1, 2, 3 bzw. 4 über der Trennlinie zu erreichen, mit 2, 4, 8 bzw. ~~16~~ 20 Steinen beginnen muss.

b) Zeige, dass Höhe 5 mit keiner endlichen Anzahl von Steinen erreichbar ist.

   Tipp: Hier muss man auf geeignete Art und Weise eine von der Feldbesetzung abhängige Größe definieren, die bei jedem Zug abnimmt. Man könnte diese Größe zum Beispiel *Energie* nennen. Dann kann man nachrechnen: Die Energie von beliebig vielen Spielsteinen in der unteren Bretthälfte ist kleiner als die Energie von auch nur einem einzigen Stein in Höhe 5. Eine mögliche Definition für die Energie, die diese Anforderungen erfüllt, besteht darin, für jeden vorhandenen Spielstein die Zahl $(1/\Phi)^d$ aufzusummieren, wobei d die *Manhattan-Entfernung* des Spielsteins zu einem beliebig ausgemachten Ursprungsstein ist. Details findest du im Internet.

Aufgabe* 17. *Verschoben aufsummierte Fibonacci-Zahlen*

In dieser Aufgabe betrachten wir die „verschoben aufgeschriebenen“ Fibonacci-Zahlen:

$$\begin{array}{l} 0{,}1 \\ 0{,}01 \\ 0{,}002 \\ 0{,}0003 \\ 0{,}00005 \\ 0{,}000008 \\ 0{,}0000013 \end{array}$$

Setzt man dieses Muster fort und summiert über alle Zeilen, so erhält man als Summe exakt den Wert 10/89. Wieso?

Tipp: Informierere dich über *erzeugende Funktionen*, zum Beispiel in dem tollen Buch *Generatingfunctionology* von Herbert Wilf (auf der Seite des Autors zu finden).

Aufgabe* 18. *Eine Zahl mit besonderer Dezimalbruchentwicklung*

Es gilt:

$$\frac{1}{998999} = 0{,}000\,001\,001\,002\,003\,005\,008\,013\,021\ldots.$$

a) Was ist daran besonders?

b) Inwiefern setzt sich das Muster auch nach 987 fort?

c) Erkläre das Phänomen.

Aufgabe 19. *Spiel und Spaß mit den 10-adischen Zahlen*

Bei den gewöhnlichen reellen Zahlen stehen in ihrer Dezimalschreibweise vor dem Komma nur endlich viele Ziffern, hinter dem Komma aber gelegentlich unendlich viele Ziffern. Bei den 10-adischen Zahlen ist es genau umgekehrt: Vor dem Komma dürfen unendlich viele Ziffern stehen, hinter dem Komma dagegen nur endlich viele. Die Rechenverfahren zur Addition, Subtraktion und Multiplikation, wie man sie aus der Schule kennt, funktionieren weitestgehend unverändert. Die Division wird etwas komplizierter.

a) Vollziehe folgende Rechnung nach: $\ldots 13562 + \ldots 90081 = \ldots 03643$.

b) Was ist $\ldots 99999 + 1$? Dabei ist $1 = \ldots 00001$.

c) Was ist -123?

d) Finde eine 10-adische Zahl x – weder Null noch Eins – mit $x^2 = x$.

e) Überlege dir (oder schlage nach), wie in den 10-adischen Zahlen die Division funktioniert. Die Division durch 3, 7, 9 und alle weiteren zu 10 teilerfremden ganzen Zahlen geht übrigens *stets ohne Komma auf*.

f) Gibt es in den 10-adischen Zahlen eine Zahl x mit der Eigenschaft $x = 1 + 1/x$, oder äquivalent $x^2 = x + 1$?

g) Wie sieht es in den 11-adischen Zahlen aus? (Schwer ohne umfangreiche Tipps.)

Bemerkung: Die Gleichung in Teilaufgabe d) kann man zu $x \cdot (x - 1) = 0$ umstellen. In den 10-adischen Zahlen kann also ein Produkt Null sein, ohne dass einer der Faktoren Null ist. Wegen dieser schlechten Eigenschaft werden die 10-adischen Zahlen kaum verwendet. *Allerdings:* Verwendet man als Basis nicht 10, sondern eine Primzahl, so gibt es dieses Problem nicht. Die 2-adischen Zahlen werden gelegentlich in der Informatik und die p-adischen Zahlen, wobei p irgendeine Primzahl ist, überall in der Zahlentheorie verwendet. Dort gibt es beispielsweise folgendes mächtiges „lokal-zu-global“ Prinzip: Eine Gleichung einer bestimmten Art hat genau dann eine Lösung in $\mathbb{Z}$, wenn sie eine Lösung in $\mathbb{R}$ und jeweils eine Lösung in allen p-adischen Zahlen hat.

Aufgabe 20. *Pi auswendig lernen*

Die Nachkommaziffern von Pi sind nichts Kanonisches: Sie hängen von der unkanonischen Wahl der Basis Zehn unseres Stellenwertsystems ab. Besser ist, die Kettenbruchentwicklung von Pi auswendig zu lernen. Sofern man die Koeffizienten als Abstrakta begreift, ist das kanonisch. Die ersten Koeffizienten lauten:

3 7 15 1 292 1 1 1 2 1 3 1 14 2 1 1 2 2 2 2 1 84 2 1 1 15 3 13 1 4 2 6 6 99 1 2 2 6 3 5 1 1 6 8 1 7 1 2 3 7 1 2 1 1 12 1 1 1 3 1 1 8 1 1 2 1 6 1 1 5 2 2 3 1 2 4 4 16 1 161 45 1 22 1 2 2 1 4 1 2 24 1 2 1 3 1 2 1 1 10 2 5 4 1 2 2 8 1 5 2 2 26 1 4 1 1 8 2 42 2 1 7 3 3 1 1 7 2 4 9 7 2 3 1 57 1 18 1 9 19 1 2 18 1 3 7 30 1 1 1 3 3 3 1 2 8 1 1 2 1 15 1 2 13 1 2 1 4 1 12 1 1 3 3 28 1 10 3 2 20 1 1 1 1 4 1 1 1 5 3 2 1 6 1 4 1 120 2 1 1 3 1 23 1 15 1 3 7 1 16 1 2 1 21 2 1 1 2 9 1 6 4 127 14 5 1 3 13 7 9 1 1 1 1 1 5 4 1 1 3 1 1 29 3 1 1 2 2 1 3 1 1 1 3 1 1 10 3 1 3 1 2 1 12 1 4 1 1 1 1 7 1 1 2 1 11