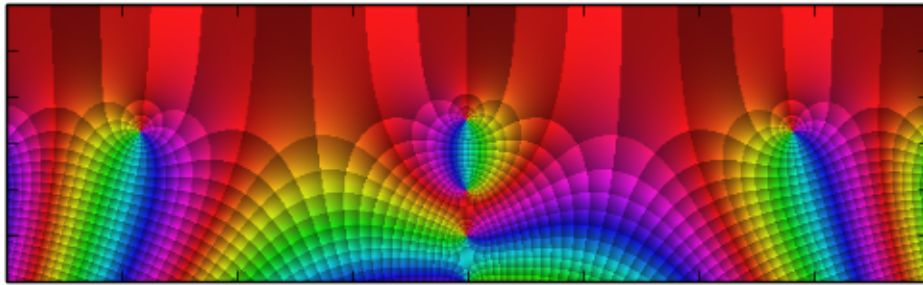




## Analytische Zahlentheorie

Zirkelzettel vom 5. und 19. Dezember 2014



Die Werte der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion auf einem Streifen um den Ursprung in der komplexen Zahlenebene (um 90 Grad gedreht). <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Riemann-Zeta-Detail.png>

### Inhaltsverzeichnis

1	Der Fundamentalsatz der Arithmetik	2
2	Die Entdeckung der Irrationalität	3
3	Die Unendlichkeit der Primzahlen	5
4	Die Riemannsche $\zeta$ -Funktion	6
5	Die Eulersche Produktformel	9
6	Die harmonische Reihe	12
7	Grobe Schranken für die Größen der Primzahlen	14
8	Grobe Schranken für die Anzahl der Primzahlen	16
9	Die Summe der Kehrwerte der Primzahlen	18
10	Die Mangoldt-Funktion $\Lambda$	19
11	Asymptotische Notation	21
12	Die Tschebyschow-Funktion $\psi$	23
13	Weitere Stichpunkte	26

# 1 Der Fundamentalsatz der Arithmetik

**Definition 1.1.** Eine *Primzahl* ist eine positive natürliche Zahl, die *genau zwei* verschiedene positive Teiler besitzt.

Gemäß dieser Definition beginnt die Folge der Primzahlen also mit

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$$

Die Zahl 1 zählt nicht als Primzahl – sie besitzt als einzigen Teiler sich selbst und hat daher nicht zwei verschiedene Teiler.

**Theorem 1.2** (Fundamentalsatz der Arithmetik). *Jede positive natürliche Zahl lässt sich auf eindeutige Art und Weise als Produkt von Primzahlen schreiben.*

*Beweis.* Sei eine beliebige natürliche Zahl  $n$  gegeben. Falls  $n$  eine Primzahl ist, haben wir damit die gesuchte Zerlegung in Primfaktoren schon gefunden. Falls  $n$  keine Primzahl ist, spaltet sich  $n$  in ein Produkt auf:  $n = a \cdot b$ , und wir können mit der Suche nach einer Zerlegung bei  $a$  und  $b$  fortfahren.

Die Eindeutigkeitsaussage ist interessanter (Aufgabe 3). □

## Aufgabe 1. Primfaktorzerlegung der Eins

Der Fundamentalsatz der Arithmetik behauptet, dass sich *jede* positive natürliche Zahl in Primfaktoren zerlegen lässt. Die Zahl 1 ist auch eine solche positive natürliche Zahl. Siehst du, wie sich diese zerlegen lässt?

*Hinweis.* Das ist etwas versteckt. Beachte, dass 1 keine Primzahl ist.

## Aufgabe 2. Soll Eins eine Primzahl sein?

Es gibt ein gutes mathematisches Argument, wieso es sinnvoll ist, die Eins nicht als Primzahl zu definieren. Finde es!

*Tipp.* Denke an die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Was wäre, wenn man die Zahl Eins als Primzahl zulassen würde?

## Aufgabe 3. Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

Mit dieser Aufgabe beweisen wir, dass die Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren bis auf Umordnung der Faktoren eindeutig ist. In Formeln ausgedrückt: Gilt

$$p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_m,$$

wobei  $p_1, \dots, p_n$  und  $q_1, \dots, q_m$  Primzahlen sind, so folgt schon  $n = m$  (links und rechts stehen also gleich viele Faktoren) und jeder Faktor der linken Seite tritt auch genau einmal auf der rechten Seite auf und umgekehrt.

- a) Zeige zuerst: Teilt eine Primzahl  $p$  ein Produkt  $a \cdot b$ , so teilt  $p$  schon  $a$  oder  $p$  teilt  $b$ . In Formeln:

$$\text{Wenn } p \mid ab, \text{ dann } p \mid a \text{ oder } p \mid b.$$

*Tipp.* Das ist gar nicht so leicht. Verwende, dass die Zahlen  $a$  und  $p$  irgendeinen größten gemeinsamen Teiler  $d$  haben, und dass sich dieser in der Form  $d = fa + gp$  für gewisse Zahlen  $f$  und  $g$  schreiben lässt. (Eine solche Darstellung des größten gemeinsamen Teilers heißt *Bézoutdarstellung*. Dass es eine solche immer gibt, folgt aus dem *euklidischen Algorithmus*.)

- b) Beweise mit dem Resultat aus Teilaufgabe a) die Eindeutigkeitsbehauptung.

#### Aufgabe 4. Primzahlen mögen Vielfache der Sechs

Beweise: Jede Primzahl größer als 3 liegt benachbart zu einem Vielfachen von 6. In Formeln: Ist  $p > 3$  eine Primzahl, so teilt 6 entweder  $p - 1$  oder  $p + 1$ .

*Tipp.* Eine Zahl ist genau dann ein Vielfaches von 6, wenn sie ein Vielfaches von 2 und von 3 ist. Weißt du von den drei Zahlen  $p - 1$ ,  $p$  und  $p + 1$ , ob sie ein Vielfaches von 3 sind?

## 2 Die Entdeckung der Irrationalität

**Definition 2.1.** Eine reelle Zahl  $x$  heißt genau dann *rational*, wenn sie sich als Quotient zweier ganzer Zahlen schreiben lässt:  $x = a/b$  für gewisse ganze Zahlen  $a$  und  $b$ .

Dass nicht alle Zahlen rational sind, war eine erstaunliche Entdeckung im fünften Jahrhundert v. Chr. Manche sehen diese Erkenntnis sogar als Geburtsstunde der modernen Mathematik an. Als Entdecker der Irrationalität gilt der griechische Mathematiker Hippasos von Metapont. Er erkannte, dass der *goldene Schnitt* irrational ist. Damit erschütterte er die Schule der Pythagoreer, denn diese waren von dem Kredo *Alles ist Zahl* überzeugt, wobei sie mit „Zahl“ *rationale Zahl* meinten. Ironischerweise kam der goldene Schnitt auch noch im Erkennungszeichen der Pythagoreer vor, dem Pentagramm.

**Theorem 2.2.** Die Zahl  $\sqrt{2}$  ist nicht rational.

#### Aufgabe 5. Irrationalität von Quadratwurzeln

- a) Beweise, dass  $\sqrt{2}$  nicht rational ist.

*Tipp.* Gehe nach folgendem Muster vor. Angenommen,  $\sqrt{2}$  ist doch rational. Nach Definition gibt es dann ganze Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $\sqrt{2} = a/b$ . Quadrieren und Umstellen zeigt  $2b^2 = a^2$ . Überlege nun, wie oft der Primfaktor 2 auf den beiden Seiten dieser Gleichung vorkommt.

- b) Beweise, dass für jede Primzahl  $p$  die Zahl  $\sqrt{p}$  nicht rational ist.
- c) Beweise, dass für jede Zahl  $n$ , in deren Primfaktorzerlegung mindestens eine Primzahl ungerade oft vorkommt, die Zahl  $\sqrt{n}$  nicht rational ist.

### Aufgabe 6. Anschauliche Bedeutung von Quadratwurzeln

Wenn Quadratwurzeln sehr seltsame Zahlen ohne praktische Bedeutung wären, hätte die Entdeckung der Irrationalität vielleicht einen geringeren Stellenwert. Tatsächlich aber kommen Quadratwurzeln in der Geometrie überall vor: Finde eine geometrische Figur, deren Kantenlängen alle ganze Zahlen sind, sodass eine weitere eingezeichnete Hilfslinie aber irrationale Länge hat.

### Aufgabe 7. Irrationalität des goldenen Schnitts

Der *goldene Schnitt* ist diejenige positive Zahl  $\phi$ , die die Gleichung  $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$  löst. Als Schnittverhältnis kommt der goldene Schnitt überall in der Natur vor.

- a) Beweise rechnerisch, dass der goldene Schnitt irrational ist.  
*Tipp.* Gehe nach folgendem Muster vor. Angenommen,  $\phi$  ist rational. Dann lässt sich  $\phi$  als ein vollständig gekürzter Bruch  $\phi = a/b$  schreiben. Zähler und Nenner sind dabei zueinander teilerfremde Zahlen. Welche Beziehung erhält man zwischen  $a$  und  $b$ , wenn man  $\phi = a/b$  in die Gleichung  $\phi = 1 + 1/\phi$  einsetzt?
- b) In dem Skript von Jost-Hinrich Eschenburg zu seiner letzten Vorlesungsreihe, den *Sternstunden* (die du auch besuchen kannst, wenn du möchtest: jeden Freitag um 12:15 Uhr), findest du auch einen geometrischen Beweis der Irrationalität des goldenen Schnitts sowie eine Erklärung, wieso der goldene Schnitt die *irrationalste* Zahl ist. <http://www.math.uni-augsburg.de/~eschenbu/sternstunden.pdf>

### Aufgabe 8. Ein mathematischer Witz basierend auf Fermats letzten Satz

Der Große Fermatsche Satz (formuliert im 17. Jahrhundert von Pierre de Fermat, bewiesen 1994 von Andrew Wiles und Richard Taylor) besagt: Die Gleichung  $a^n + b^n = c^n$  in den Unbekannten  $a$ ,  $b$  und  $c$  hat für  $n \geq 3$  keine positive natürliche Lösung.

- a) Finde eine Lösung im Fall  $n = 2$ , also drei positive natürliche Zahlen  $a, b, c$  mit  $a^2 + b^2 = c^2$ . Solche Lösungen heißen auch *pythagoräische Zahlentripel*.
- b) Beweise mit dem Großen Fermatschen Satz, dass für keine natürliche Zahl  $n \geq 3$  die  $n$ -te Wurzel aus 2,  $\sqrt[n]{2}$ , rational ist.

c) Warum ist das witzig?

*Tipp.* Wie schwer war der Beweis von Fermats letztem Satz?

d) Lässt sich der Beweis aus b) übertragen, um die Irrationalität von  $\sqrt{2}$  zu zeigen?

*Tipp.* Das ist ein Bonuswitz.

### 3 Die Unendlichkeit der Primzahlen

Es gibt unendlich viele Primzahlen. Es ist bemerkenswert, dass wir das rigoros beweisen können – obwohl wir natürlich niemals alle Primzahlen aufschreiben können.

**Theorem 3.1.** *Zu jeder endlichen Liste von Primzahlen gibt es eine weitere Primzahl, die nicht in der Liste enthalten ist.*

#### **Aufgabe 9.** *Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen*

Seien  $q_1, \dots, q_n$  irgendwelche Primzahlen. Wir suchen eine weitere Primzahl, die ungleich den gegebenen Primzahlen ist. Dazu betrachten wir die Hilfszahl

$$N := \prod_{i=1}^n q_i + 1 = q_1 q_2 \cdots q_{n-1} q_n + 1.$$

a) Wieso teilt keine der gegebenen Primzahlen  $q_1, \dots, q_n$  die Zahl  $N$ ?

b) Wie erhält man aus  $N$  also eine neue Primzahl, die ungleich den gegebenen ist?

*Bemerkung.* Euklids Argumentation wird gelegentlich auch in Widerspruchsbeweisen verwendet, in deren Kontext die hier definierte Zahl  $N$  dann stets eine Primzahl ist. Im Allgemeinen ist  $N$  aber keine Primzahl. Etwa sind  $3 \cdot 5 + 1 = 16$  und  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$  keine Primzahlen.

#### **Aufgabe 10.** *Lücken zwischen Primzahlen*

Zeige: Zu jeder Lauflänge  $n \geq 1$  gibt es eine Folge von  $n$  direkt aufeinanderfolgenden Zahlen, welche alle keine Primzahlen sind.

*Hinweis.* Das heißt nicht, dass es eine unendlich lange Folge von direkt aufeinanderfolgenden Zahlen gibt, welche alle keine Primzahlen sind. Denn dann gäbe es ja nur endlich viele Primzahlen. Stattdessen ist gemeint: Irgendwo auf dem Zahlenstrahl gibt es fünf aufeinanderfolgende Zahlen, die keine Primzahlen sind; irgendwo anders gibt es hundert aufeinanderfolgende Zahlen, die keine Primzahlen sind; und so weiter.

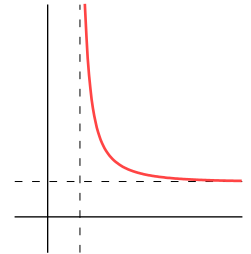
*Tipp.* Kannst du den Zahlen  $m! + 2$  bis  $m! + m$  ansehen, welche Teiler sie auf jeden Fall haben? Dabei ist  $m! = m \cdot (m - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  (gesprochen: „ $m$  Fakultät“).

## 4 Die Riemannsche $\zeta$ -Funktion

**Definition 4.1.** Für reelle Zahlen  $s > 1$  ist die *Riemannsche  $\zeta$ -Funktion* durch folgende Formel definiert.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

Die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion ist also durch eine *unendliche Reihe* festgelegt. Je nachdem, wie schnell die Summanden einer unendlichen Reihe gegen Null streben, hat sie entweder einen richtigen Zahlenwert (sie *konvergiert*), den Wert  $+\infty$  oder den Wert  $-\infty$  (sie *divergiert bestimmt*) oder gar keinen Wert (sie *divergiert unbestimmt*). Mit Reihen, die nicht konvergieren, kann man nicht wie gewöhnlich rechnen – das soll Aufgabe 12 demonstrieren. Mit dem *Integralvergleichskriterium*, das man im ersten Semester eines Mathe-Studiums lernt, kann man aber leicht nachweisen, dass für  $s > 1$  die gegebene Reihe konvergiert.



Der reelle Graph der  $\zeta$ -Funktion ist recht unspektakulär. Er hat die Geraden  $x = 1$  und  $y = 1$  als Asymptoten. So unscheinbar dieser Graph und die Definition auch sein mögen, die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion hat eine Vielzahl kurioser Eigenschaften und ist Gegenstand vieler mathematischer Vermutungen. In der analytischen Zahlentheorie ist sie von fundamentaler Bedeutung, angewendet wird sie aber auch in Physik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.

- Die  $\zeta$ -Funktion lässt sich auch als ein zahlentheoretisches interessantes Produkt schreiben (Abschnitt 5).
- Für  $s \rightarrow 1$  divergiert  $\zeta(s)$ . Das ist eng mit der Unendlichkeit der Primzahlen verbunden.
- Es ist schwierig, geschlossene Ausdrücke für Funktionswerte der  $\zeta$ -Funktion anzugeben. Aber beispielsweise gilt  $\zeta(2) = \pi^2/6$ . Die Funktionswerte an allen anderen positiven geraden Zahlen  $n$  sind ebenfalls bekannt, sie sind wie  $\zeta(2)$  bestimmte rationale Vielfache von  $\pi^n$ .
- Man vermutet, dass die Werte der  $\zeta$ -Funktion an allen positiven ungeraden Zahlen (außer der Eins) irrational sind. Man weiß schon, dass zumindest unendlich viele dieser Werte irrational sind, und man weiß auch, dass  $\zeta(3)$  irrational ist. Es ist aber noch nicht einmal bekannt, ob auch  $\zeta(5)$  irrational ist. (Kurioserweise weiß man aber, dass unter den Zahlen  $\zeta(5)$ ,  $\zeta(7)$ ,  $\zeta(9)$  und  $\zeta(11)$  mindestens eine irrational sein muss.)
- Obwohl die definierende Formel nur für  $s > 1$  konvergiert, lässt sich die  $\zeta$ -Funktion auf den Bereich  $s < 1$  und sogar auf *alle komplexen Zahlen* ungleich 1 fortsetzen.

- Die Werte der  $\zeta$ -Funktion an allen negativen ganzen Zahlen sind bekannt. Bei allen negativen geraden Zahlen hat sie Nullstellen, die so genannten *trivialen Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion*.
- Es ist bekannt, dass alle weiteren Nullstellen in den komplexen Zahlen Realteil zwischen 0 und 1 (jeweils ausgeschlossen) haben.
- Man vermutet, dass diese so genannten *nichttrivialen Nullstellen* sogar alle Realteil genau  $1/2$  haben. Das besagt die berühmte *Riemannsche Vermutung*.
- Die Riemannsche Vermutung ist eng verwandt mit der Verteilung der Primzahlen und der Goldbachschen Vermutung. Eine lange Liste von Konsequenzen der Riemannschen Vermutung gibt es auf <http://mathoverflow.net/questions/17209/consequences-of-the-riemann-hypothesis>.

### Aufgabe 11. Eine einfache konvergente Reihe

- Was ergibt  $1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots$ ?
- Was ergibt  $1 + 0,1_2 + 0,01_2 + 0,001_2 + \dots$ , wenn man die Summanden im Binärsystem liest?

### Aufgabe 12. Grandis Reihe

Sei  $s := 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ . Diese Reihe divergiert, man kann mit ihr nicht wie gewöhnlich rechnen. Das sollen die folgenden Teilaufgaben illustrieren. Die Reihe ist nach dem italienischen Mathematiker und Geistlichen Guido Grandi (\* 1671, † 1742) benannt.

- Fasse die ersten beiden Summanden zusammen, dann die zweiten beiden, die dritten beiden, und so weiter. Welches Ergebnis erhält man auf diese Art und Weise für  $s$ ?
- Lass den ersten Summanden vorne stehen, fasse dann aber den zweiten und dritten Summanden zusammen, den vierten und fünften, und so weiter. Was ist nun das Ergebnis?
- Wie muss man die Summanden zusammenfassen, um deine Lieblingszahl als Ergebnis zu erhalten?
- Finde einen Weg, um die Gleichung  $1 - s = s$  nicht unplausibel zu finden. Welchen Wert hat  $s$  dieser Gleichung zufolge?

**Aufgabe 13.** Was ist  $\zeta(2)$ ?

Die Zahl  $\zeta(2)$  ist gleich  $\pi^2/6$ . Der übliche Beweis dieser Tatsache verwendet mehrdimensionale Integrationstheorie und erfordert daher mehr Vorkenntnisse, als wir hier voraussetzen möchten. Es ist aber auch schon spannend zu verstehen, wieso  $\zeta(2)$  überhaupt endlich ist. Das ist ja, angesichts der Definition von  $\zeta(2)$  als die unendliche Reihe

$$\zeta(2) = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots,$$

gar nicht klar.

- a) Finde zunächst den Wert von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots.$$

*Tipp.* Rechne nach, dass gilt:  $\frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ . Mit dieser Erkenntnis kannst du die Summe umschreiben und ausrechnen. Dabei wirst du feststellen, dass sich die meisten Summanden gegenseitig wegheben. Summen, bei denen das passiert, heißen auch *Teleskopsummen*.

- b) Zeige:  $\zeta(2) < \infty$ .

*Tipp.* In welchem Größenverhältnis stehen  $\frac{1}{n^2}$  und  $\frac{1}{(n-1) \cdot n}$  zueinander?

*Bemerkung.* Eine Möglichkeit, den exakten Zahlenwert von  $\zeta(2)$  zu bestimmen, zeigt folgende Rechnung auf.

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^1 x^{n-1} dx \right) \cdot \left( \int_0^1 y^{n-1} dy \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^{n-1} y^{n-1} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} y^{n-1} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} (xy)^i dx dy \stackrel{A14}{=} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy \end{aligned}$$

Dabei ist insbesondere zu begründen, dass die unendliche Summe mit dem Integral vertauscht werden kann. Das mehrdimensionale Integral am Ende muss dann noch ausgewertet werden, zum Beispiel über eine trickreiche Koordinatentransformation.



## 5 Die Eulersche Produktformel

**Theorem 5.1.** Für alle  $s > 1$  gilt die Identität

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 3^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 5^{-s}} \cdots$$

Diese Beziehung ist aus mehreren Gründen bemerkenswert. Zunächst einmal ist es eine Seltenheit, dass sich eine *Summe* (die linke Seite der Gleichung) auch als ein (nicht-triviales) *Produkt* schreiben lässt. Zudem noch gehen in die rechte Seite die Primzahlen ein, beim bloßen Anblick der Formel für die  $\zeta$ -Funktion würde man das nicht vermuten.

Für den Beweis benötigen wir die Formel für die *geometrische Reihe* (Aufgabe 14),

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x},$$

und die Potenzgesetze  $x^{-a} = 1/x^a$  sowie  $(x^a)^b = x^{ab}$ .

*Beweis.* Wir beginnen mit der rechten Seite der Gleichung. Der Bruch passt auf die Formel für die geometrische Reihe, deswegen gilt

$$\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p \text{ prim}} (1 + p^{-s} + (p^2)^{-s} + \cdots).$$

Wenn wir dieses unendliche Produkt ausmultiplizieren, erhalten wir die Summe über alle Zahlen der Form  $1/t^s$ , wobei  $t$  alle Möglichkeiten, beliebig viele Primzahlen aufzumultiplizieren, durchläuft. Da sich nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik jede positive natürliche Zahl auf genau eine Art und Weise als Produkt von Primzahlen schreiben lässt, erhalten wir also die Summe über alle Zahlen der Form  $1/n^s$ , wobei  $n$  alle positiven natürlichen Zahlen durchläuft. Nach Definition ist diese Summe  $\zeta(s)$ .  $\square$

Überblick verloren? Aufgabe 16 wird in kleinen handlichen Stücken den Beweis verständlich machen.

### Aufgabe 14. Die geometrische Reihe

In dieser Aufgabe wollen wir die so genannte *geometrische Reihe*

$$s := 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

auswerten. Der erste Schritt dazu ist mit dieser Zeile schon getan – in der Mathematik wird vieles einfacher, wenn man dem Unbekannten einen Namen gibt:  $s$ . Denn dann steht der Weg für algebraische Umformungen offen.

a) Rechne nach:  $s \cdot (1 - x) = 1$ .

*Tipp.* Multipliziere die unendliche Summe aus.

b) Folgere:  $s = 1/(1 - x)$ .

c) Löse Aufgabe 11 erneut, und zwar unter Verwendung der Formel aus b).

*Bemerkung.* Die Multiplikation mit  $(1 - x)$ , die zur Auswertung von  $s$  also sehr hilfreich war, war ein *Trick*. Der Definition von  $s$  ist dieser nicht zu entnehmen, man benötigt Kreativität und Geduld, um auf ihn zu kommen. Die geometrische Reihe konvergiert nur, falls der Betrag von  $s$  kleiner als 1 ist, und nur in diesem Fall gilt die Formel  $s = 1/(1 - x)$ . Diese Subtilitäten wollen wir nicht weiter beachten, obwohl sie durchaus wichtig sind.

**Aufgabe 15. Beweise ohne Worte**

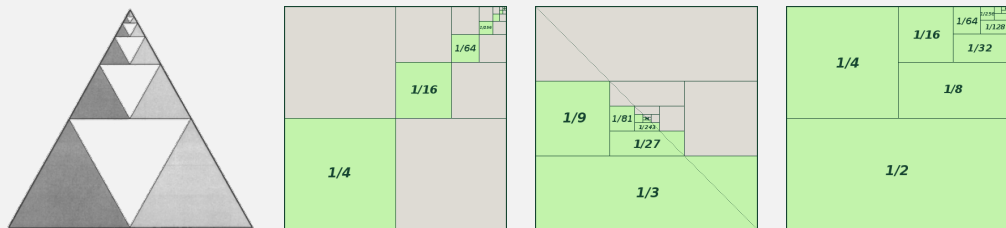
Die aus dem Internet ausgeliehenen Skizzen demonstrieren (von links nach rechts) folgende Sachverhalte – und zwar ganz ohne Formeln und Rechnungen. Schau dir die Skizzen lang genug an, um zu verstehen, wieso sie diese Sachverhalte wirklich beweisen.

a)  $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{3}$ .

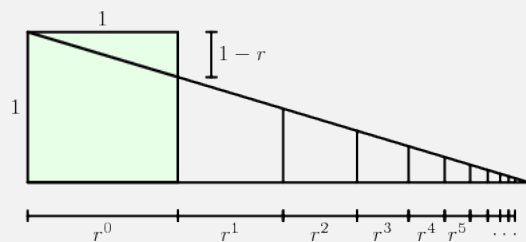
c)  $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots = \frac{1}{2}$ .

b) Wie bei a).

d)  $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots = 1$ .



Es ist sogar möglich, die allgemeine Formel für die geometrische Reihe aus Aufgabe 14 durch eine aussagekräftige Skizze zu beweisen. Kannst du erklären, wie das funktioniert? (Achtung, knifflig!)



**Aufgabe 16.** Die Eulersche Produktformel in fünf Schritten

- a) Zum Aufwärmen: Multipliziere folgendes Produkt aus.

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right).$$

- b) Multipliziere jetzt in dem Produkt

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right)$$

die Klammern so lange aus, bis du genug von dem System verstehst, um zu erkennen: Hier kommt die Summe über die Kehrwerte von all den positiven natürlichen Zahlen, in deren Primfaktorzerlegung nur die Faktoren 2 und 3 auftreten, heraus.

- c) Multipliziere nun das dreifache Produkt

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots\right)$$

soweit aus, um zu erkennen, dass das die Summe über die Kehrwerte von all den positiven natürlichen Zahlen, in deren Primfaktorzerlegung nur die Faktoren 2, 3 und 5 vorkommen, ergibt.

- d) Mit dieser Vorarbeit ist es nicht mehr schwer, zu glauben, dass das unendliche Produkt

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) \dots$$

gleich der Summe über die Kehrwerte von *allen* positiven natürlichen Zahlen ist.

- e) Schlussendlich: Ergänzen wir überall ein „hoch  $s$ “, so erhalten wir die Summe über alle Zahlen der Form  $1/n^s$ , wobei  $n$  über alle positiven natürlichen Zahlen läuft. Das ist die Eulersche Produktformel.

$$\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{(2^2)^s} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{(3^2)^s} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{(5^2)^s} + \dots\right) \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

**Aufgabe 17.** Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion rechts von der Eins

Die Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion spielen in der Zahlentheorie eine große Rolle und sind Gegenstand der Riemannschen Vermutung. In dieser Aufgabe wollen wir zwei erste Schritte in diese Richtung gehen.

- a) Zeige, dass für alle reellen Zahlen  $s > 1$  die Zahl  $\zeta(s)$  ungleich Null ist.
- b) Zeige, dass auch für alle komplexen Zahlen  $s$  mit Realteil größer als Eins die Zahl  $\zeta(s)$  ungleich Null ist.

*Hinweis.* Ist  $s$  komplex, so können die Summanden in der definierenden Reihe für  $\zeta(s)$  unübersichtliche komplexe Zahlen werden, mit Real- und Imaginärteilen, die sowohl positiv als auch negativ sein können. Verwende also nicht die Reihendarstellung für  $\zeta(s)$ , um diese Aufgabe zu lösen.

*Warnung.* Es stimmt auch, dass  $\zeta(s)$  für komplexe Zahlen  $s$  mit Realteil genau gleich Eins nicht Null ist – diese Tatsache ist äquivalent zum Primzahlsatz (Theorem 8.1). Das kann man aber weder mit der Reihendarstellung noch mit der Eulerschen Produktformel zeigen, denn diese konvergieren nur für Realteil größer als Eins.

### Aufgabe 18. Ein mathematisches Wunder

Folgende bemerkenswerte Gleichung stellt einen Zusammenhang zwischen den Quadratzahlen der Primzahlen und der Kreiszahl  $\pi$  her:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{120}{121} \cdot \frac{168}{169} \cdot \dots = \frac{6}{\pi^2}.$$

Der belgische Mathematiker Luc Lemaire meint dazu: „Irgendein zum Scherzen aufgelegter Gott der Mathematik hat die Kreislänge in der a priori völlig unverwandten Liste der Primzahlen kodiert.“<sup>1</sup>

Beweise diese Gleichung, indem du die Produktformel und das Ergebnis  $\zeta(2) = \pi^2/6$  (diskutiert in Aufgabe 13) verwendest.

## 6 Die harmonische Reihe

Die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

wird *harmonische Reihe* genannt. Sie divergiert bestimmt, ihr Wert ist  $+\infty$ .

Mit ein wenig Hintergrundwissen aus Integrationstheorie kann man sich überlegen, dass die harmonische Reihe in etwa so schnell wächst wie der natürliche Logarithmus:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln(n), \quad (\star)$$

und eine verfeinerte Analyse liefert folgendes Resultat.

<sup>1</sup>Englisches Original: “It means in particular that some facetious god of mathematics has encoded the length of a circle in the list of prime numbers, totally unrelated a priori.” Luc Lemaire, Mathematics is alive and well and thriving in Europe, Heft 54 des Newsletter der European Mathematical Society, 2004.

**Theorem 6.1.** Es gibt eine Konstante  $\gamma \approx 0,57722$ , die Euler–Mascheroni-Konstante, der sich die Differenzen aus linker und rechter Seite von (\*) beliebig genau nähern. In Symbolen:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma.$$

In diesem Kontext gibt es eine Abschätzung, die für unsere Zwecke wichtig sein wird:

$$\sum_{i=1}^{\lceil e^{A-\gamma} \rceil} \frac{1}{i} > A.$$

Die Klammern bezeichnen dabei die *Aufrundungsoperation* (zur nächsten ganzen Zahl).

$A$	$e^{A-\gamma}$	$\lceil e^{A-\gamma} \rceil$	$\sum_{i=1}^{\lceil e^{A-\gamma} \rceil} 1/i$
1	1.56	2	1.50
2	4.23	5	2.28
3	11.50	12	3.10
4	31.26	32	4.06
5	84.97	85	5.03
6	230.97	231	6.02
7	627.84	628	7.02
8	1706.63	1707	8.02
9	4639.11	4640	9.02
10	12610.42	12611	10.02

**Aufgabe 19.** Divergenz der harmonischen Reihe

- a) Wieso ist  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$ ? *Tipp.*  $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{4}$  und  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ .
- b) Wieso ist  $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{2}$ ? *Tipp.*  $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \geq \frac{1}{8}$ .
- c) Wieso ist  $\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} \geq \frac{1}{2}$ ?
- d) Wieso ist  $\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32} \geq \frac{1}{2}$ ?
- e) Folgere: Die harmonische Reihe ist größergleich  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ , und das ist sicherlich  $+\infty$ .

**Aufgabe 20.** Slow harmonic series is slow

Die harmonische Reihe divergiert zwar, tut das aber sehr langsam. Addiere mit einem Taschenrechner oder einem Computerprogramm so viele Terme der Reihe, wie du möchtest. Ich wette, du wirst nicht über 30 hinauskommen.

### Aufgabe 21. Eulers Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen

- a) Was ist  $\zeta(1)$ ?
- b) Verwende Eulers Produktformel, um einen Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen zu führen: Wie sähe die Formel aus, wenn es nur endlich viele Primzahlen gäbe?

## 7 Grobe Schranken für die Größen der Primzahlen

Es gibt keine geschlossene Formel für die Primzahlen.<sup>2</sup> Trotzdem kann man explizite *Schranken* für die Größe der  $n$ -ten Primzahl angeben. Mit deren Hilfe kann man bestimmen, wie viele Primzahlen es in einem vorgegebenem Bereich mindestens geben muss oder höchstens geben kann.

Ein erstes Resultat in diese Richtung ist das folgende. Dabei sei  $p_1, p_2, p_3, \dots$  die unendliche Liste aller Primzahlen.

### Theorem 7.1.

- a) Ist  $p$  eine Primzahl, so ist die nächste Primzahl kleiner oder gleich  $p! + 1$ .
- b) Die  $r$ -te Primzahl ist höchstens  $2^{(2^r)}$ :  $p_r < 2^{(2^r)}$ .

Das folgende Resultat ist schwieriger zu beweisen, liefert aber auch eine bessere (kleinere) Abschätzung. Die Klammern bezeichnen wieder die Aufrundungoperation.

### Theorem 7.2.

- a) Ist  $p$  eine Primzahl, so ist die nächste Primzahl kleiner oder gleich  $\lceil e^{p-\gamma} \rceil$ .
- b) Die  $r$ -te Primzahl ist höchstens  $\lceil e^{r-\gamma} \rceil$ :  $p_r \leq \lceil e^{r-\gamma} \rceil$ .

Um diese beiden Behauptungen zu beweisen, werden wir eine interessante mathematische Technik verwenden: *Proof mining*. Deren Ausgangspunkt ist die triviale Erkenntnis, dass ein *Beweis* einer Aussage viel mehr enthält als die bloße Information, dass die bewiesene Aussage korrekt ist. Ein Beweis gibt auch (mehr oder weniger verständliche) Hintergründe zu ihrer Korrektheit, knüpft Verbindungen zwischen unterschiedlichen mathematischen Objekten und führt so Verborgenes auf Offensichtliches zurück.

Das führt dazu, dass man aus Beweisen rein qualitativer Aussagen – zum Beispiel: *Es gibt unendlich viele Primzahlen.* – oftmals quantitative Information extrahieren kann: *Im Bereich von 1 bis  $n$  gibt es mindestens  $\text{soundso}$  viele Primzahlen.*

Proof mining werden wir an Euklids und an Eulers Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen üben. Euklids Beweis liefert Theorem 7.1, Eulers komplexerer Beweis liefert das stärkere Theorem 7.2.

Beide Theoreme sind aber nur allererste Schritte im Verständnis der Asymptotik der Primzahlen. Es gibt nämlich die beiden folgenden, viel schärferen Aussagen. Wir werden sie später im Detail diskutieren.

<sup>2</sup>Das ist nur halb wahr. Informiere dich über *Mills Formel*.

**Theorem 7.3** (Bertrands Postulat). Ist  $p$  eine Primzahl, so ist die nächste Primzahl höchstens  $2p$ .

**Theorem 7.4** (Primzahlsatz, ungenau formuliert). Zwischen 1 und  $n$  gibt es etwa  $n / \ln n$  viele Primzahlen.

**Aufgabe 22.** Theorem 7.1 aus Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen

- a) Studiere Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen (Aufgabe 9), um zu sehen: Ist  $p$  eine Primzahl, so kommt spätestens bis zu  $p! + 1$  („ $p$  Fakultät“,  $p! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \cdot p$ ) die nächste Primzahl.
- b) Zeige: Für die  $(r+1)$ -te Primzahl gilt die Abschätzung

$$p_{r+1} \leq p_1 \cdot \dots \cdot p_r + 1.$$

- c) Folgere mit vollständiger Induktion:

$$p_r < 2^{(2^r)}.$$

*Tipp.* Verwende, dass für alle Zahlen  $m \geq 2$  gilt:  $m/4 + 1 \leq m$ . Verwende außerdem die Formel  $2^1 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 2$ .

- d) Es gilt sogar  $p_r \leq \sqrt{2^{(2^r)}} = 2^{(2^{r-1})}$ . Kannst du das auch zeigen?

**Aufgabe 23.** Theorem 7.2 aus Eulers Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen

- a) Sei  $q$  eine natürliche Zahl. Studiere den Beweis von Eulers Produktformel, um folgende verfeinerte Aussage nachzuvollziehen:

$$\sum_n \frac{1}{n} = \prod_{\substack{p \leq q \\ p \text{ prim}}} \frac{1}{1 - p^{-1}}.$$

Die Summe auf der linken Seite soll dabei über all diejenigen positiven natürlichen Zahlen laufen, in deren Primfaktoren nur Primzahlen  $\leq q$  vorkommen. Passend dazu läuft das Produkt auf der rechten Seite über alle Primzahlen  $\leq q$ .

- b) Beweise:

$$\prod_{\substack{p \leq q \\ p \text{ prim}}} \frac{1}{1 - p^{-1}} = \prod_{\substack{p \leq q \\ p \text{ prim}}} \frac{p}{p-1} \leq \prod_{a=1}^q \frac{a}{a-1} = q.$$

- c) Sei  $q$  eine Primzahl. Angenommen, bis zur Zahl  $\lceil e^{q-\gamma} \rceil$  (einschließlich) kommen keine weiteren Primzahlen. Zeige dann

$$\sum_{n=1}^{\lceil e^{q-\gamma} \rceil} \frac{1}{n} \leq q.$$

- d) Verwende die Abschätzung aus Abschnitt 6, um zu sehen, dass das nicht sein kann und dass daher zwischen  $q + 1$  und  $\lceil e^{q-\gamma} \rceil$  mindestens eine weitere Primzahl liegen muss.

- e) Beweise:

$$\prod_{i=1}^r \frac{1}{1 - p_i^{-1}} \leq \prod_{i=1}^r \frac{1}{1 - (i+1)^{-1}} = \prod_{i=1}^r \frac{i+1}{i} = r + 1.$$

- f) Folgere: Die  $(r + 1)$ -te Primzahl ist kleinergleich  $\lceil e^{r+1-\gamma} \rceil$ .

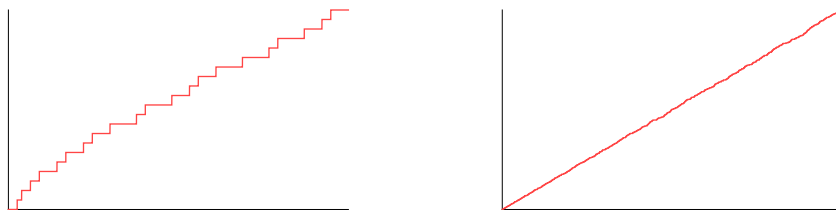
## 8 Grobe Schranken für die Anzahl der Primzahlen

In der Zahlentheorie interessieren wir uns für den Verlauf der *Primzahlfunktion*  $\pi$ :

$$\begin{aligned} \pi(n) &:= \text{Anzahl Primzahlen zwischen 1 und } n \\ &= \sum_{p \leq n} 1. \end{aligned}$$

Der gefeierte *Primzahlsatz* gibt zwar keine explizite Formel für  $\pi(n)$ , macht aber sehr wohl eine Aussage über die *Asymptotik* von  $\pi$ . Er gibt also eine Antwort auf die Frage, welchem Term sich  $\pi(n)$  für größer werdendes  $n$  immer weiter annähert.

Im Graphen links sind gut die Sprünge bei den Primzahlen zu erkennen. Das etwas chaotische Verhalten verschwindet, wenn man die Primzahlfunktion auf größeren Skalen betrachtet (rechts).



**Theorem 8.1** (Primzahlsatz). *Asymptotisch gilt*

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$



Genauer: Der Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  von  $\pi(n) / \frac{n}{\ln n}$  ist Eins.

Dieses Resultat wurde schon Ende des 18. Jahrhunderts von Gauß und Legendre vermutet, konnte aber erst 1896 durch Hadamard und De La Vallée-Poussin rigoros bewiesen werden. Wegweisend für den Beweis war eine Arbeit Riemanns aus dem Jahr 1859 mit dem viel versprochenen Titel *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*. Wie der Beweis in etwa funktioniert, werden wir noch verstehen. Die noch unbewiesene Riemannsche Vermutung impliziert übrigens eine Verbesserung des Primzahlsatzes.

Um die Aussage des Primzahlsatzes besser wertschätzen zu können, möchten wir zwei deutlich schwächere Abschätzungen angeben, die wir mit den Ergebnissen aus dem vorherigen Abschnitt beweisen können. Dabei ist  $\text{ld}$  der Logarithmus zur Basis 2.

**Theorem 8.2.**  $\pi(n) \geq \text{ld ld } n$ .

**Theorem 8.3.**  $\pi(n) \geq \ln n$ .

$n$	$\pi(n)$	$n / \ln n$	$\pi(n) / \frac{n}{\ln n}$	$\text{ld ld } n$	$\ln n$
10	4	4.3	0.921	1.7	2.3
100	25	21.7	1.151	2.7	4.6
1000	168	144.8	1.161	3.3	6.9
10000	1229	1085.7	1.132	3.7	9.2
100000	9592	8685.9	1.104	4.1	11.5
1000000	78498	72382.4	1.084	4.3	13.8
10000000	664579	620420.7	1.071	4.5	16.1
100000000	5761455	5428681.0	1.061	4.7	18.4

*Bemerkung 8.4.* Der Primzahlsatz behauptet nicht, dass der Unterschied zwischen  $\pi(n)$  und  $\frac{n}{\ln n}$ , also die Differenz  $\pi(n) - \frac{n}{\ln n}$ , für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null geht. Tatsächlich strebt diese Differenz gegen  $+\infty$ . Der Primzahlsatz trifft eine Aussage über den *relativen Fehler*, also den Bruch  $(\pi(n) - \frac{n}{\ln n}) / \pi(n)$ . Dieser geht für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null.

**Aufgabe 24.** *Theorem 8.2 aus Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen*

Aus Euklids Beweis haben wir die Abschätzung

$$p_n < 2^{2^n}$$

extrahiert. Zeige damit für alle Primzahlen  $p$ , dass  $\pi(p) > \text{ld ld } p$ .

*Tipp.* Es gilt  $\pi(p_n) = n$ , wieso?

*Hinweis.* Wenn du möchtest, kannst du versuchen, auch noch  $\pi(n) > \text{ld ld } n$  für alle natürlichen Zahlen (statt nur für die Primzahlen) zu beweisen. Die Hauptarbeit ist dabei schon erledigt, denn die linke Seite macht nur bei Primzahlen Sprünge, und die rechte wächst zwar kontinuierlich, ändert sich bis zur nächsten Primzahl aber stets um weniger als Eins. Diese letzte Teilaussage ohne weitere Hilfsmittel, insbesondere ohne Bertrands Postulat, zu beweisen, ist aber nicht ganz einfach.

**Aufgabe 25.** *Theorem 8.3 aus Eulers Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen*

Aus Eulers Beweis haben wir die Abschätzung

$$p_n \leq \lceil e^{n-\gamma} \rceil$$

extrahiert; tatsächlich gilt sogar „ $<$ “ statt nur „ $\leq$ “. Beweise damit für alle Primzahlen  $p$ , dass  $\pi(p) > \gamma + \ln p > \ln p$ .

## 9 Die Summe der Kehrwerte der Primzahlen

Es gibt genauso viele Quadratzahlen wie Primzahlen, nämlich jeweils *abzählbar unendlich viele*. Intuitiv würde man trotzdem behaupten, dass die Primzahlen dichter gesät seien als die Quadratzahlen. Eine Möglichkeit, den Unterschied mathematisch präzise zu verdeutlichen, besteht darin, die Summe der Kehrwerte zu vergleichen:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \quad \text{vs.} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

Wie wir nämlich in Aufgabe 13 gesehen haben, hat die linke Reihe einen endlichen Wert (nämlich  $\pi^2/6$ ). Die rechte Reihe dagegen divergiert, sie hat den Wert  $+\infty$ . Das zeigt, dass die Kehrwerte der Quadratzahlen viel schneller kleiner werden als die Kehrwerte der Primzahlen; umgekehrt formuliert: die Quadratzahlen wachsen viel schneller an als die Primzahlen.

**Theorem 9.1.** *Die Summe der Kehrwerte der Primzahlen ist unendlich:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$ .*

*Beweis.* Wenn wir das Resultat aus Aufgabe 26 umstellen, erhalten wir

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} \geq \ln \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - C,$$

wobei  $C$  eine Konstante ist. Auf der rechten Seite kommt also die harmonische Reihe vor, von der wir bereits wissen, dass sie divergiert (Abschnitt 6).  $\square$

**Aufgabe 26.** *Die Summe der Kehrwerte der Primzahlen*

Zeige:

$$\ln \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} + C,$$

wobei  $C$  eine bestimmte Konstante ist. Die Summe auf der rechten Seite soll über alle Primzahlen  $p$  zwischen 1 und  $N$  gehen. Beginne dazu mit der linken Seite und führe

eine lange Abschätzungskette, die zum Schluss in der rechten Seite mündet. Verwende folgende Zutaten:

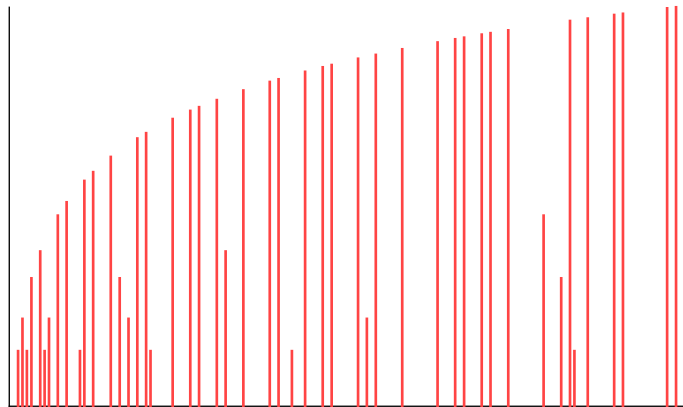
- $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq \sum_n \frac{1}{n}$ , wobei die Summe auf der rechten Seite über all diejenigen natürlichen Zahlen läuft, in deren Primfaktorzerlegung nur Primzahlen  $\leq N$  vorkommen. Wieso stimmt das?
- $\sum_n \frac{1}{n} = \prod_{p \leq N} \frac{1}{1-p^{-1}}$ . Warum gilt das?
- $\ln(1-x^{-1}) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \dots$ . Diese Formel musst du nicht beweisen, sie ist eine so genannte *Taylorentwicklung*.
- Trenne eine Summe der Form  $\sum_{p \leq N} (\frac{1}{p} + ??)$  in zwei Teile auf:  $\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} + \sum_{p \leq N} ??$ .
- Sobald es sich anbietet,  $\frac{1}{p^2}$  auszuklammern, mach das.
- Verwende die Formel für die geometrische Reihe, um  $1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots$  zu vereinfachen.
- Verwende zum Schluss das Ergebnis aus Aufgabe 13a).

## 10 Die Mangoldt-Funktion $\Lambda$

Die Mangoldt-Funktion  $\Lambda$  (benannt nach dem deutschen Mathematiker Hans von Mangoldt, \* 1854, † 1925 und notiert durch ein großes griechisches Lambda) ist in der analytischen Zahlentheorie eine wichtige Funktion. Sie ist eng verwandt mit der Primzahlfunktion  $\pi$  und mit der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion. Außerdem kommt sie in der Definition der *Tschebyschow-Funktion* vor – eine Funktion, die wie  $\pi$  die Anzahl der Primzahlen misst, mit der man aber dank besserer Eigenschaften leichter umgehen kann.

**Definition 10.1.** Für Primzahlpotenzen  $n = p^k$  mit  $k \geq 1$  ist die *Mangoldt-Funktion*  $\Lambda$  definiert durch  $\Lambda(n) = \ln p$ . Für alle anderen natürlichen Zahlen ist  $\Lambda(n) = 0$ .

Im Graphen sind die unzähligen Nullstellen von  $\Lambda$  (alle Zahlen, die keine reinen Primzahlpotenzen sind) anhand der Lücken erkennbar.



Ein erster Grund, wieso die Mangoldt-Funktion eine große zahlentheoretische Bedeutung hat, zeigt das folgende Theorem.

**Theorem 10.2.** Für jede positive natürliche Zahl  $n$  gilt

$$\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Dabei geht die Summe auf der rechten Seite über alle positiven Teiler von  $n$ .

Zum Beispiel sind die positiven Teiler von 12 die Zahlen 1, 2, 3, 4, 6 und 12, und tatsächlich gilt, unter Verwendung der Rechenregel  $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$  für Logarithmen:

$$\begin{aligned} \ln 12 &= \ln(2 \cdot 2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 2 + \ln 3 = \Lambda(2) + \Lambda(4) + \Lambda(3) \\ &= \Lambda(1) + \Lambda(2) + \Lambda(3) + \Lambda(4) + \Lambda(6) + \Lambda(12) \\ &= \sum_{d|12} \Lambda(d). \end{aligned}$$

Den Zusammenhang zur Riemannschen  $\zeta$ -Funktion stellt folgende Formel dar.

**Theorem 10.3.** Die Ableitung von  $\zeta$ ,  $\zeta$  selbst und  $\Lambda$  erfüllen die Identität

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

**Aufgabe 27.** Der Fundamentalsatz der Arithmetik in Mangoldt-Sprache

Beweise Theorem 10.2, zeige also für alle positiven Zahlen  $n$ , dass  $\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$ .

*Tipp.* Überlege dir anhand der Primfaktorzerlegung der Zahl  $n$ , welche Teiler  $n$  hat und welchen Wert die Mangoldt-Funktion  $\Lambda$  bei ihnen annimmt. Erwähne dich außerdem an die Rechenregel  $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$  für Logarithmen.

### Aufgabe 28. Zusammenhang von $\Lambda$ mit $\zeta$

Beweise Theorem 10.3.

*Tipp.* Verwende die Eulersche Produktformel (Abschnitt 5), die Ableitungsregel  $(a^s)' = a^s \cdot \ln a$  und die Produktregel für unendlich viele Faktoren:

$$\begin{aligned}(f_1(s) \cdot f_2(s) \cdot f_3(s) \cdot \dots)' &= f_1'(s) \cdot f_2(s) \cdot f_3(s) \cdot \dots \\ &+ f_1(s) \cdot f_2'(s) \cdot f_3(s) \cdot \dots \\ &+ f_1(s) \cdot f_2(s) \cdot f_3'(s) \cdot \dots \\ &+ \dots\end{aligned}$$

### Aufgabe 29. Exkurs: Wieso das Zwölfersystem besser als das Zehnersystem ist

Im Zwölfersystem verwendet man insgesamt zwölf Ziffern, nämlich die üblichen Ziffern von 0 bis 9 und dann zwei neue Ziffern:  $A$  für 10 und  $B$  für 11. Zum Beispiel steht die Zahl  $3B5_{12}$  für 5 Einer, 11 Zwölfer und 3 Vielfache von 144, also für die Zahl 569. Die Zahl  $2,2_{12}$  steht für 2 Einer und 2 Zwölftel, also für  $2 + \frac{2}{12} = 2,1\bar{6}$ .

- Wie schreibt sich  $1/3$  im Zwölfersystem?
- Wie  $1/4$  und  $1/6$ ?
- Wie  $1/5$ ?
- Welchen Vorteil hat also das Zwölfersystem gegenüber dem Zehnersystem? An welcher Eigenschaft der Zahl 12 liegt das?

## 11 Asymptotische Notation

**Definition 11.1.** Sind  $f(x)$  und  $g(x)$  nichtnegative Funktionsterme, so schreiben wir genau dann  $f(x) \ll g(x)$  (in Worten: „ $f(x)$  ist asymptotisch kleiner oder gleich  $g(x)$ “), wenn es eine Konstante  $C \geq 0$  gibt, sodass ab einer gewissen Stelle  $x_0$  für alle  $x \geq x_0$  gilt, dass

$$f(x) \leq C \cdot g(x).$$

Auf Deutsch: Wenn wir  $f(x) \ll g(x)$  schreiben, meinen wir nicht, dass an allen Stellen der Graph von  $f$  unterhalb von dem von  $g$  liegt. Wir meinen stattdessen, dass – ab einer gewissen Grenze, vorher dürfen  $f(x)$  und  $g(x)$  völlig beliebig verlaufen – die Funktion  $f$  kleiner ist als irgendein konstantes Vielfaches von  $g$ . Um mit dieser Kurzschreibweise vertraut zu werden, müssen wir uns ein paar Beispiele ansehen.

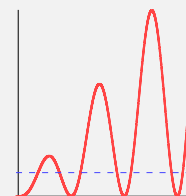
- $x \ll x^2$ . Für  $x \in ]0, 1[$  ist zwar  $x$  größer als  $x^2$ , danach aber ist  $x$  kleiner als  $x^2$ .

- $100x \ll x^2$ . Hier dauert es etwas länger, bis das stärkere Wachstum der Quadratfunktion überwiegt.
- $x^2 \ll x^2$ . An diesem Beispiel sieht man, dass „ $\ll$ “ eine asymptotische Variante von „ $\leq$ “, und nicht etwa von „ $<$ “ ist.
- $3x^2 \ll x^2$ . Es ist  $3x^2$  zwar nie kleiner als  $x^2$ , aber kleiner als ein bestimmtes konstantes Vielfaches von  $x^2$ , nämlich zum Beispiel dem Zehnfachen von  $x^2$ .
- $x^3 \not\ll x^2$ . Die Kubikfunktion wächst stärker als die Quadratfunktion, und sie wächst auch stärker als jedes konstante Vielfache der Quadratfunktion.
- $\arctan(x) \ll 1$ . Im Grenzwert für  $x \rightarrow \infty$  strebt  $\arctan(x)$  gegen  $\pi/2 \approx 1,6$ . Das ist zwar nicht kleiner als Eins, aber kleiner als ein konstantes Vielfaches der Eins.
- $1/x \ll x$ . Für kleine  $x$  ist  $1/x$  viel größer als  $x$ . Ab der Stelle 1 jedoch ist  $1/x$  kleiner als  $x$ .

- Lemma 11.2.**
- Wenn  $f(x) \ll g(x)$  und  $g(x) \ll h(x)$ , dann auch  $f(x) \ll h(x)$ .
  - Wenn  $f(x) \ll g(x)$  und  $a(x) \ll b(x)$ , dann auch  $f(x) + a(x) \ll g(x) + b(x)$ .
  - Wenn  $f(x) \ll g(x)$  und  $a(x) \ll b(x)$ , dann auch  $f(x) \cdot a(x) \ll g(x) \cdot b(x)$ .

**Aufgabe 30.** Weitere Beispiele zur asymptotischen Notation

- Gilt  $e^5 \ll x^5$  oder  $x^5 \ll e^5$ ?
- Gilt  $x \cdot \ln x \ll x$  oder  $x \ll x \cdot \ln x$ ?
- Gilt  $x \cdot \sin(x)^2 \ll x^5$ ?
- Erkläre, wieso weder  $x \cdot \sin(x)^2 \ll 1$  noch  $1 \ll x \cdot \sin(x)^2$  stimmt (siehe Skizze).



**Aufgabe 31.** Theorie zur asymptotischen Notation

Beweise Lemma 11.2. Für Behauptung a) kannst du dabei nach folgendem Muster vorgehen; es sind nur noch die Lücken auszufüllen.

Da  $f(x) \ll g(x)$ , gibt es eine Konstante  $C \geq 0$  und eine Schranke  $x_0$ , sodass für alle  $x \geq x_0$  gilt:  $f(x) \leq C \cdot g(x)$ . Da  $g(x) \ll h(x)$ , gibt es eine weitere Konstante  $D \geq 0$  und eine weitere Schranke  $x_1$ , sodass für alle  $x \geq x_1$  gilt:  $g(x) \leq D \cdot h(x)$ . Daher gilt zusammengenommen für alle  $x \geq ??$ , dass  $f(x) \leq ?? \cdot h(x)$ . Also  $f(x) \ll h(x)$ .

### Aufgabe 32. Asymptotik und Grenzwerte

Gelte, dass  $f(n)/g(n)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen eine Zahl  $a < \infty$  konvergiert. Überlege dir, dass dann  $f(n) \ll g(n)$ .

*Tipp.* Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a$ , dann gibt es irgendeine Stelle  $n_0$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  gilt:  $f(n)/g(n) \leq a + 1$ .

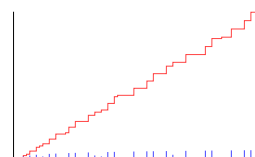
## 12 Die Tschebyschow-Funktion $\psi$

**Definition 12.1.** Die (zweite) *Tschebyschow-Funktion*  $\psi$  ist definiert als

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Dabei geht die Summe über alle natürlichen Zahlen  $n \leq x$ .

Im Graphen (obere Kurve, in Rot) sind die Sprünge der Tschebyschow-Funktion bei den Primzahlen und ihren Potenzen gut erkennbar. Zum Vergleich ist die Mangoldt-Funktion in Blau eingezeichnet.



Unmittelbar sind wir eigentlich nicht an der Tschebyschow-Funktion, sondern an der Primzahlfunktion  $\pi$  interessiert. Die beiden Funktionen sind aber eng miteinander verwandt: Bei der Primzahlfunktion wird bei jeder neuen Primzahl  $p$  der konstante Summand 1 addiert. Bei der Tschebyschow-Funktion dagegen wird der Summand  $\ln p$  addiert, und außerdem wird  $\ln p$  auch bei allen Potenzen von  $p$  addiert.

Das folgende Theorem zeigt, dass man den Primzahlsatz, der eine asymptotische Aussage über  $\pi(n)$  trifft, auch auf  $\psi(n)$  umformulieren kann.

**Theorem 12.2.** Sollte  $\psi(n)/n$  im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  den Wert 1 annehmen, so nimmt auch  $\pi(n)/\frac{n}{\ln n}$  im Grenzwert den Wert 1 an; und umgekehrt.

Der Primzahlsatz (Theorem 8.1) ist also äquivalent zur Aussage, dass  $\psi(n)$  asymptotisch äquivalent zu  $n$  ist. Es hat sich herausgestellt, dass es leichter ist, den Primzahlsatz über diesen Umweg mit der Tschebyschow-Funktion als direkt zu beweisen.

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt einem Beweis des Primzahlsatzes stellen, möchten wir in diesem Abschnitt eine schwächere, aber immer noch interessante Aussage verstehen.

**Theorem 12.3.** Asymptotisch ist  $\psi(N)$  kleiner als  $N$ :  $\psi(N) \ll N$ .

*Beweis.* Der Beweis folgt in voneinander unabhängigen Schritten, die wir in den folgenden Aufgaben bearbeiten.

- Um das Theorem zu beweisen, genügt es nachzuweisen, dass  $\sum_{N < n \leq 2N} \Lambda(n) \ll N$ .

- In der Summe  $\sum_{N < n \leq 2N} \Lambda(n) = \Lambda(N+1) + \Lambda(N+2) + \dots + \Lambda(2N)$  untersuchen wir separat folgende Arten von Summanden  $\Lambda(n)$ : die, für die  $n$  eine Primzahlpotenz der Form  $p^j$  mit  $j \geq 2$  ist; die, für die  $n$  eine Primzahl ist; und alle restlichen Zahlen.
- Die Summe über die Summanden der ersten Art ist  $\ll N$ .
- Die Summe über die Summanden der zweiten Art ist  $\ll N$ .
- Die Summe über die Summanden der dritten Art ist Null und daher erst recht  $\ll N$ . □

**Aufgabe 33.** Beweis von Theorem 12.3, Teil I: Reduktionsschritt

Nimm an, dass schon bewiesen wurde, dass

$$\sum_{N < n \leq 2N} \Lambda(n) \ll N.$$

Dabei geht die Summe über alle natürlichen Zahlen zwischen  $N$  (ausschließlich) und  $2N$  (einschließlich). Zeige unter dieser Annahme, dass dann auch

$$\psi(N) = \sum_{n \leq N} \Lambda(n) \ll N.$$

Hierbei geht die Summe über alle natürlichen Zahlen  $\leq N$ .

*Tipp.* Zerlege die Summe  $\psi(N)$  in mehrere Teilbereiche: von  $N/2$  bis  $N$ ; von  $N/4$  bis  $N/2$ ; von  $N/8$  bis  $N/4$ ; und so weiter. Wende die Annahme auf jeden dieser Teilbereiche an und erinnere dich, dass  $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 2$  (Aufgabe 15).

**Aufgabe 34.** Beweis von Theorem 12.3, Teil II: Summanden erster Art

In dieser Aufgabe betrachten wir in der Summe  $\sum_{N < n \leq 2N} \Lambda(n)$  all diejenigen Summanden, die zu Zahlen  $n$  der Form  $n = p^j$  mit einer Primzahl  $p$  und  $j \geq 2$  gehören (im Folgenden „Summanden erster Art“ genannt).

- Zeige: Eine solche Primzahl  $p$  ist  $\leq \sqrt{2N}$ .
- Folgere: Von den Summanden dieser Art gibt es höchstens  $\sqrt{2N}$  viele.
- Mache dir klar, dass der Exponent  $j$  eines solchen Summanden höchstens  $j_{\max} := \log_p(2N)$  ist.
- Der Beitrag der Primzahl  $p$  zu Summanden dieser Art ist daher höchstens  $\ln p \cdot (j_{\max} - 2)$  (wieso?). Zeige, dass dieser Beitrag höchstens  $\ln(2N)$  ist.  
*Tipp.* Verwende das Logarithmusgesetz  $\log_p(2N) = \ln(2N) / \ln(p)$ .



e) Folgere: Der Gesamtbeitrag aller Summanden erster Art ist höchstens  $\sqrt{2N} \cdot \ln(2N)$ .

f) Beweise, dass diese obere Grenze  $\ll N$  ist.

*Hinweis.* Wenn du bis zu dieser Stelle gekommen bist, hast du vielleicht keine Lust mehr auf Rechnungen. Dann skizziere einfach  $\sqrt{2N} \cdot \ln(2N)/N$  (zum Beispiel auf WolframAlpha.com) und ermittle empirisch den Grenzwert für  $N \rightarrow \infty$ . Aufgabe 32 verrät dir dann, dass mehr nicht zu tun ist.

### Aufgabe 35. Beweis von Theorem 12.3, Teil III: Summanden zweiter Art

Es geht nun um die Summanden der Form  $\Lambda(p)$  in  $\sum_{N < n \leq 2N} \Lambda(n)$ , wobei  $p$  eine Primzahl zwischen  $N$  (ausschließlich) und  $2N$  (einschließlich) ist („Summanden zweiter Art“). Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

a) Beweise, dass eine solche Primzahl  $p$  den Binomialkoeffizienten  $\binom{2N}{N}$  teilt. Verwende dazu folgende Formel:

$$\binom{2N}{N} = \frac{(2N)!}{N! \cdot N!} = \frac{(2N) \cdot (2N-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$$

b) Folgere, dass das Produkt aller Primzahlen zwischen  $N$  (ausschließlich) und  $2N$  (einschließlich) die Zahl  $\binom{2N}{N}$  teilt.

c) Beweise: Der Gesamtbeitrag der Summanden zweiter Art, also  $\sum_{N < p \leq 2N} \ln p$ , ist höchstens  $\ln 2^{2N}$ .

*Hinweis.* Es gilt  $\binom{2N}{N} \leq 2^{2N}$ . Das zeigt die folgende Aufgabe.

d) Beweise, dass  $\ln 2^{2N} \ll N$ .

### Aufgabe 36. Eine Abschätzung für Binomialkoeffizienten

In dieser Aufgabe wollen wir folgende Abschätzung beweisen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \leq 2^n.$$

a) Erkläre, wieso es  $2^n$  viele Teilmengen der Menge  $\{1, \dots, n\}$  gibt – die leere Teilmenge und ganz  $\{1, \dots, n\}$  mitgezählt.

b) In der Kombinatorik lernt man, dass  $\binom{n}{k}$  die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen der Menge  $\{1, \dots, n\}$  ist. Wieso genügt diese Einsicht in Kombination mit Teilaufgabe a), um die Abschätzung zu beweisen?

Es gibt auch einen rechnerischen Beweis der Abschätzung. Und zwar besagt der *binomische Lehrsatz*, dass

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

Für  $n = 2$  erhält man aus dieser Formel die bekannte erste binomische Formel,

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

und für  $n = 3$  erhält man

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

- c) Schreibe  $2^n$  als  $(1 + 1)^n$  und führe damit einen Beweis der Abschätzung über den binomischen Lehrsatz.

## 13 Weitere Stichpunkte

Ausblick in Stichpunkten, muss noch ausgeführt werden:

- Zusammenhang zwischen  $\pi$  und  $\psi$
- Beweis, dass  $\pi(x) \ll x / \ln x$
- Beweis, dass der Primzahlsatz äquivalent dazu ist, dass die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion keine Nullstellen mit Realteil 1 hat
- Beweis, dass die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion keine Nullstellen mit Realteil 1 hat, unter Verwendung einer expliziten Formel für  $\Lambda(n)$ , in der die Nullstellen von  $\zeta$  vorkommen
- Erklärung, inwieweit die Nullstellen der  $\zeta$ -Funktion wie Klänge sind; und Erklärung, inwieweit die Riemannsche Vermutung impliziert, dass die Nullstellen sogar einen Akkord bilden (auf Terence Tao verweisen)
- Erklärung, inwieweit sich Primzahlen wie Zufallszahlen verhalten; und Erklärung, inwieweit sie das nicht tun
- Erklärung, in welchem Sinn  $1 + 2 + 3 + \cdots = -1/12$  gilt; und was das mit dem Casimir-Effekt aus der Physik zu tun hat