Was sind und was sollen die Topoi?

Ingo Blechschmidt

Pizzaseminar in Mathematik
Universität Augsburg
27. Januar 2017

1 Kategorientheorie
- Was sind Kategorien?
- Kategorielle Dualität
- Anwendungen von Kategorientheorie

2 Elementartopoi

3 Topoi als Kategorien von Garben

4 Topoi als Räume

5 Topoi als Alternativuniversen

6 Topoi als Verkörperungen von Theorien

7 Wieso sich mit Topoi befassen?

Was sind Kategorien?

Kategorien sind Ansammlungen von **Objekten** zusammen mit **Morphismen** zwischen ihnen.

Kategorie	Objekte	Morphismen
Set	Mengen	Abbildungen
Vect	Vektorräume	lineare Abbildungen
Hask	Haskell-Typen	Haskell-Funktionen
Pkmn	Pokémon	Entwicklungsprozesse
Cob	Mannigfaltigkeiten	Kobordismen

Kategorientheorie stellt **Beziehungen zwischen Objekten** statt etwaiger **innerer Struktur** in den Vordergrund.

Was sind Kategorien?

Kategorien sind Ansammlungen von **Objekten** zusammen mit **Morphismen** zwischen ihnen.

Kategorie	Objekte	Morphismen
Set	Mengen	Abbildungen
Vect	Vektorräume	lineare Abbildungen
Hask	Haskell-Typen	Haskell-Funktionen
Pkmn	Pokémon	Entwicklungsprozesse
Cob	Mannigfaltigkeiten	Kobordismen

Kategorientheorie stellt **Beziehungen zwischen Objekten** statt etwaiger **innerer Struktur** in den Vordergrund.

Ein Objekt T ist genau dann **terminal**, wenn es für jedes Objekt X genau einen Morphismus $X \to T$ gibt.

Kategorielle Dualität

$$\begin{array}{rcl} f \circ g & \text{vs.} & g \circ f \\ \leq & \text{vs.} & \geq \\ \text{injektiv} & \text{vs.} & \text{surjektiv} \\ \{\heartsuit\} & \text{vs.} & \emptyset \\ \times & \text{vs.} & \amalg \\ \text{ggT} & \text{vs.} & \text{kgV} \\ \cap & \text{vs.} & \cup \\ \text{Teilmenge} & \text{vs.} & \text{Faktormenge} \end{array}$$

Anwendungen von Kategorientheorie

- Untersuchung von Dualität
- Systematische Sprache als Gerüst zum Denken
- Leitfaden, um richtige Definitionen zu formulieren
- Triviales wird trivialerweise trivial:
  Allgemeiner abstrakter Nonsens
- Konzeptionelle Vereinheitlichung:
  Limiten, Kolimiten, adjungierte Funktoren

Was sind Elementartopoi?

Elementartopoi sind Kategorien mit so guten Eigenschaften, dass man „in ihnen Mathe machen kann". Sie müssen besitzen:

- endliche Limiten: etwa $X \times Y$ und $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$
- interne Hom-Objekte
- einen Unterobjektklassifizierer: etwa $\Omega = \{0, 1\}$

Beispiele:

- Set, die Kategorie der Mengen
- FinSet, die Kategorie der endlichen Mengen
- Set^2, die Kategorie der Mengenpaare
- Sh(X), die Kategorie der Garben über einem Raum X
- Eff$(\mathcal{M})$, der effektive Topos zu einem Rechenmodell $\mathcal{M}$
- Der Bohrtopos zu einem quantenmechanischem System A
- Gödels und Cohens Topoi

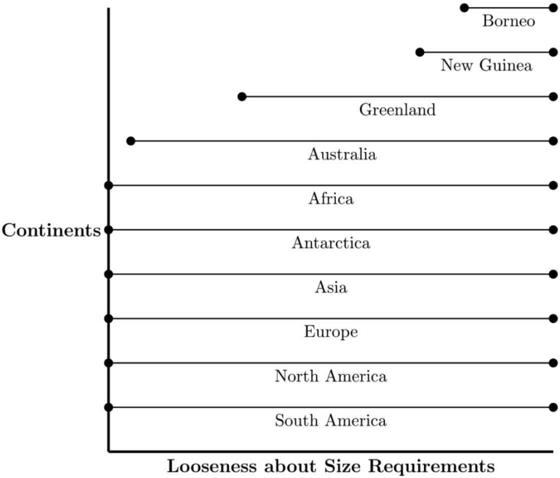
Topoi als Kategorien von Garben

Sei X ein Raum ($\mathbb{R}^n$, metrischer Raum, topologischer Raum, Örtlichkeit, Situs, Topos).

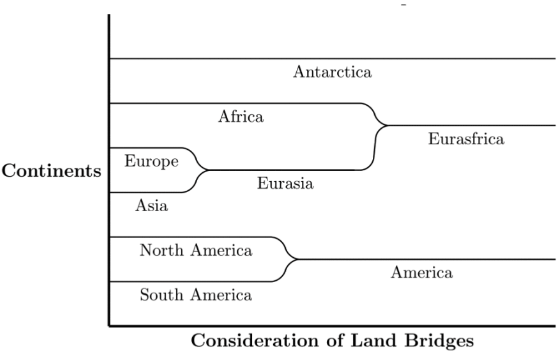
Eine **Garbe** über X ist eine **stetige Ansammlung von Mengen**, je eine für jeden Punkt von X. Wir stellen uns Garben als **veränderliche Mengen** vor.

Raum X	Kategorie der Garben über X
$\{\heartsuit\}$	Set
$\{\heartsuit, \blacktriangledown\}$	Set^2
$(\mathbb{N}, \geq)$	Kategorie der zeitabhängigen Mengen
$\mathrm{Ring}^{\mathrm{op}}$	Kategorie der Schemata (und allgemeinerer Räume)
Man	Kategorie von mit Mnf. sondierbaren Räumen

Die Garbe der Kontinente



Die Garbe der Kontinente



Topoi als Räume

Wie bei konventionellen Räumen gibt es Konzepte wie

- **Punkt eines Topos**,
- **offener Teil eines Topos**,
- **Untertopos**,
- **Garbe über einem Topos** (und ihre Kohomologie) und
- **stetige Abbildung zwischen Topoi**.

Dabei stellen wir uns $\mathrm{Sh}(X)$ grafisch wie X vor.

- Der Funktor $X \mapsto \mathrm{Sh}(X)$ ist beinahe volltreu.
- Auch punktlose Topoi können nichttrivial sein:
  Topos der zufälligen 0/1-Folgen,
  Topos der Surjektionen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$
- Topoi können riesig sein: Topos aller Gruppen
- Historische Motivation: der étale Topos eines Schemas

Topoi als Alternativuniversen

Jeder Topos kommt mit einer **internen Sprache** und lässt sich daher als **Alternativuniversum**, in dem nicht unbedingt die üblichen Gesetze der Logik gelten, auffassen.

Topos $\mathcal{E}$	Bedeutung von „$\mathcal{E} \models \varphi$“
Set	Die Aussage φ stimmt im üblichen Sinn.
$\mathrm{Sh}(X)$	Die Aussage φ stimmt auf ganz X.
$\mathrm{Sh}(\mathbb{N}, \geq)$	Die Aussage φ stimmt zu jeder Zeit.
$\mathrm{Eff}(\mathcal{M})$	Es gibt einen berechenbaren Zeugen für φ.

Die Lingua franca aller Topoi ist **konstruktive Mathematik**:

- kein Axiom vom ausgeschlossenen Dritten: $\varphi \vee \neg\varphi$
- kein Axiom der Doppelnegationselimination: $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$
- kein Auswahlaxiom

Konstruktive Mathematik?

Eine Zahl heißt genau dann **rational**, wenn sie sich als Bruch zweier ganzer Zahlen schreiben lässt.

Satz. Es gibt **irrationale** Zahlen x und y sodass x^y rational ist.

Beispiele

In **Gödels Topos** gilt:
Es gibt keine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

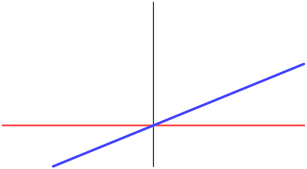
In **Cohens Topos** gilt:
Es gibt eine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

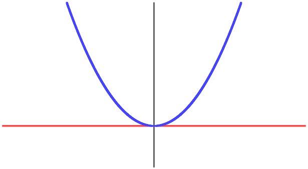
Beispiele

In **Gödels Topos** gilt:
Es gibt keine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

In **Cohens Topos** gilt:
Es gibt eine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

Im **glatten Topos** gilt:
Es gibt infinitesimale Zahlen ε mit $\varepsilon^2 = 0$, aber $\varepsilon \neq 0$.





Beispiele

In **Gödels Topos** gilt:
Es gibt keine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

In **Cohens Topos** gilt:
Es gibt eine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

Im **glatten Topos** gilt:
Es gibt infinitesimale Zahlen ε mit $\varepsilon^2 = 0$, aber $\varepsilon \neq 0$.

Im **effektiven Topos** gilt:
Jede Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist durch ein Programm berechenbar.

Beispiele

In **Gödels Topos** gilt:
Es gibt keine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

In **Cohens Topos** gilt:
Es gibt eine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

Im **glatten Topos** gilt:
Es gibt infinitesimale Zahlen ε mit $\varepsilon^2 = 0$, aber $\varepsilon \neq 0$.

Im **effektiven Topos** gilt:
Jede Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist durch ein Programm berechenbar.

Im **Zariski-Topos** gilt:
Jede Funktion $R \to R$ ist ein Polynom.

Operationen mit Topoi

- Jeder Topos besitzt einen **kleinsten dichten Untertopos**. Dieser ist stets boolsch.
- Jeder Topos wird von einem boolschen Topos **überdeckt**.
- Ist A ein Objekt eines Topos $\mathcal{E}$, so enthält der Scheibentopos $\mathcal{E}/A$ ein **generisches Element** von A.
- Ist φ eine Aussage der internen Sprache eines Topos $\mathcal{E}$, so ist $\mathcal{E}/[\![\varphi]\!]$ der **größte offene Untertopos**, auf dem φ gilt.
- Unter gewissen Bedingungen kann man künstliche Injektionen und Surjektionen zu Topoi hinzufügen.
- Ist K ein Körper in einem Topos $\mathcal{E}$, so lebt der **separable Abschluss** von K in einem gewissen anderem Topos.

Topoi als Theorien

Zu jeder **geometrischen Theorie** T gibt es den Topos $\mathrm{Set}[T]$ der **Modelle** von T. Beispiele:

- Topos der Gruppen
- Topos der Ringe und sein Untertopos der lokalen Ringe
- Topos der Mengen
- Topos der Intervalle ($\simeq$ sSet)

In $\mathrm{Set}[T]$ lebt das **generische Modell** von T.

- Jedes Modell von T ist Rückzug des generischen Modells und erbt all dessen geometrische Eigenschaften.
- Quotiententheorien führen zu Untertopoi.
- Jeder Topos ist der Topos der Modelle einer Theorie.
- Verschiedene Theorien können äquivalente Topoi geben!

Wieso sich mit Topoi befassen?

Weil sie …

- existieren,
- einen Beitrag zur Philosophie der Mathematik leisten,
- das Studium kurioser Traumaxiome ermöglichen,
- gewisse Konzepte vergegenständlichen können,
- ein flexibleres Raumkonzept bieten,
- Querverbindungen innerhalb der Mathematik herstellen und
- mathematische Probleme vereinfachen können:
  für jede Situation den passenden Topos.