LÖBS PARADOXON

1

Aussage A:

„Wenn Aussage A stimmt,
dann ist der Mond aus Käse."

Kurzer hypothet. Einschub: (2)

Ang., Aussage A wäre war.

Dann ist der Mond aus Käse.

Das gerade war ein Beweis v. Aussage A!

Folglich ist der Mond aus Käse.

Kontraposition

$A \Rightarrow B$

Wenn es regnet, dann ist die Straße nass. w.

Wenn es nicht regnet, dann ist die Straße nicht nass. f.

$(\neg A) \Rightarrow (\neg B)$

Wenn die Straße nicht nass ist, $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

dann regnet es nicht. w.

3a

R: regnet $\Rightarrow$ nass.

~~$\neg R$: regnet $\Rightarrow$ $\neg$ nass~~

regnet und $\neg$ nass

$\wedge$

A: $A \Rightarrow$ Mond aus Käse. ④

$\neg A$: $A \wedge$ Mond nicht aus Käse.

$\rightsquigarrow$ wir sehen: $\neg\neg A$

$$\Longrightarrow A$$

Aussage C:

„Aussage C ist nicht beweisbar."

<u>Beh.:</u> Aussage C ist nicht beweisbar.

<u>Bew.:</u> Ang.: sie wäre beweisbar.

Dann wäre sie auch wahr.

Dann wäre C nicht beweisbar. ↯

7

Beh.: C ist wahr.

Bew.: s. oben.

Fazit: C ist wahr, aber nicht beweisbar

(Instanz von Gödels Unvollständigkeitssatz)

Wahrheit vs. Beweisbarkeit

7

- Eine Aussage ist genau dann **beweisbar**, wenn es einen Beweis von ihr gibt.

„syntaktisch“

endliches Textstück, das ausgehend von gesetzten Axiomen mit logischen Schlüsseln die Aussage folgert

8

- Eine Aussage ist genau dann <u>wahr</u>, wenn sie im <u>intendierten Modell</u> (Standardmodell) wahr stimmt.

„semantisch"

Peano-Axiome:

- 0 ist eine nat. Zahl.
- Jede nat. Zahl hat einen Nachfolger.
- Die 0 ist kein Nachfolger einer Zahl.

⋮

Das 'intendierte' Modell von PA ist:

„Die nat. Zahlen"

$0, 1, 2, \ldots$

Aber es gibt weitere Modelle!

Gödels Unvollständigkeitssatz: (11)

Es gibt eine Aussage C (C in der Sprache von PA)
mit folg. Eig.:

(1) Es gibt keinen Beweis von C in PA.

(2) Im Standardmodell von PA
stimmt C.

Gödels Vollständigkeitssatz: 12

Ist eine Aussage in <u>allen</u> Modellen korrekt, so ist sie auch beweisbar.