WIE ZUFALL BEIM ZÄHLEN HILFT (1)

Anwendung 1: Kombinatorisches Zählen

Anzahl Möglichkeiten: $2^{6\cdot 6}$ ohne Bed.

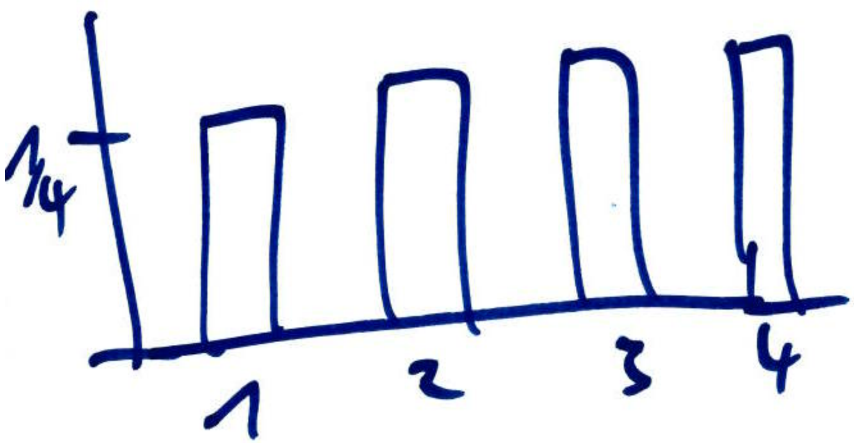
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1

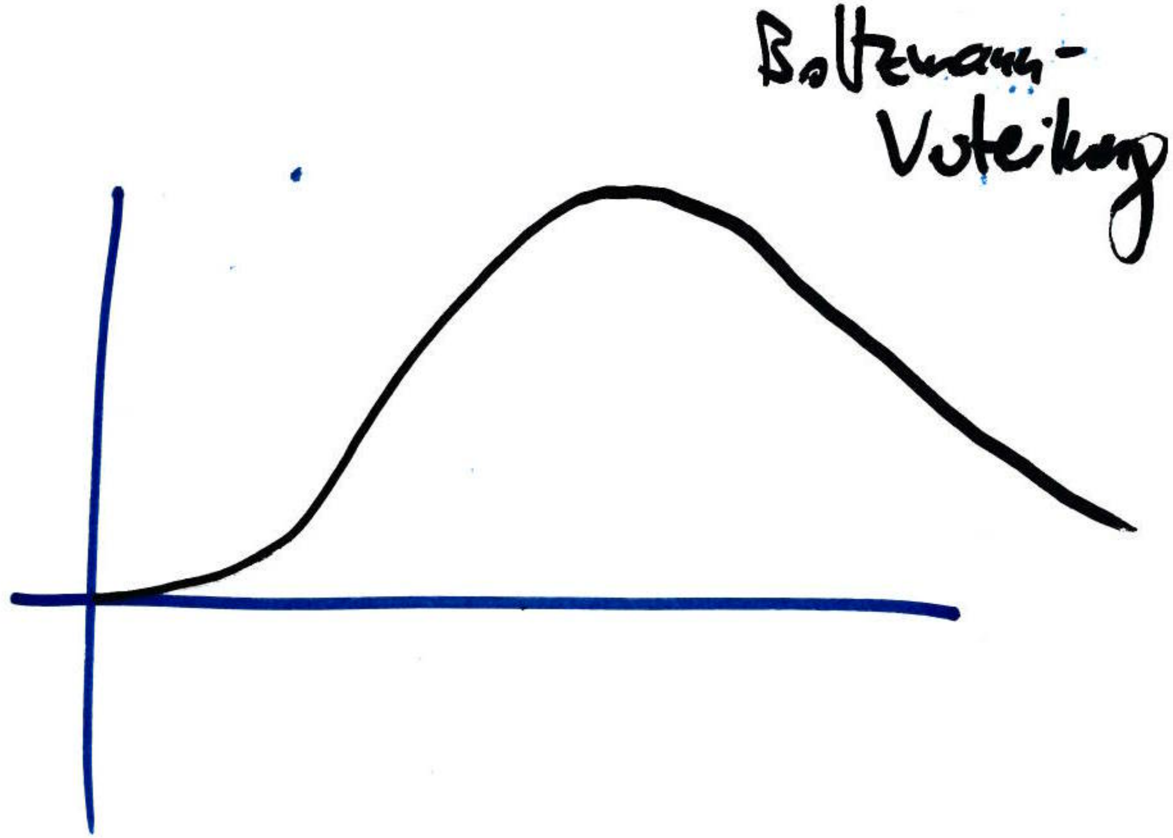
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0

Anzahl Mögl. mit Dö[illegible]:

?! schwierig!

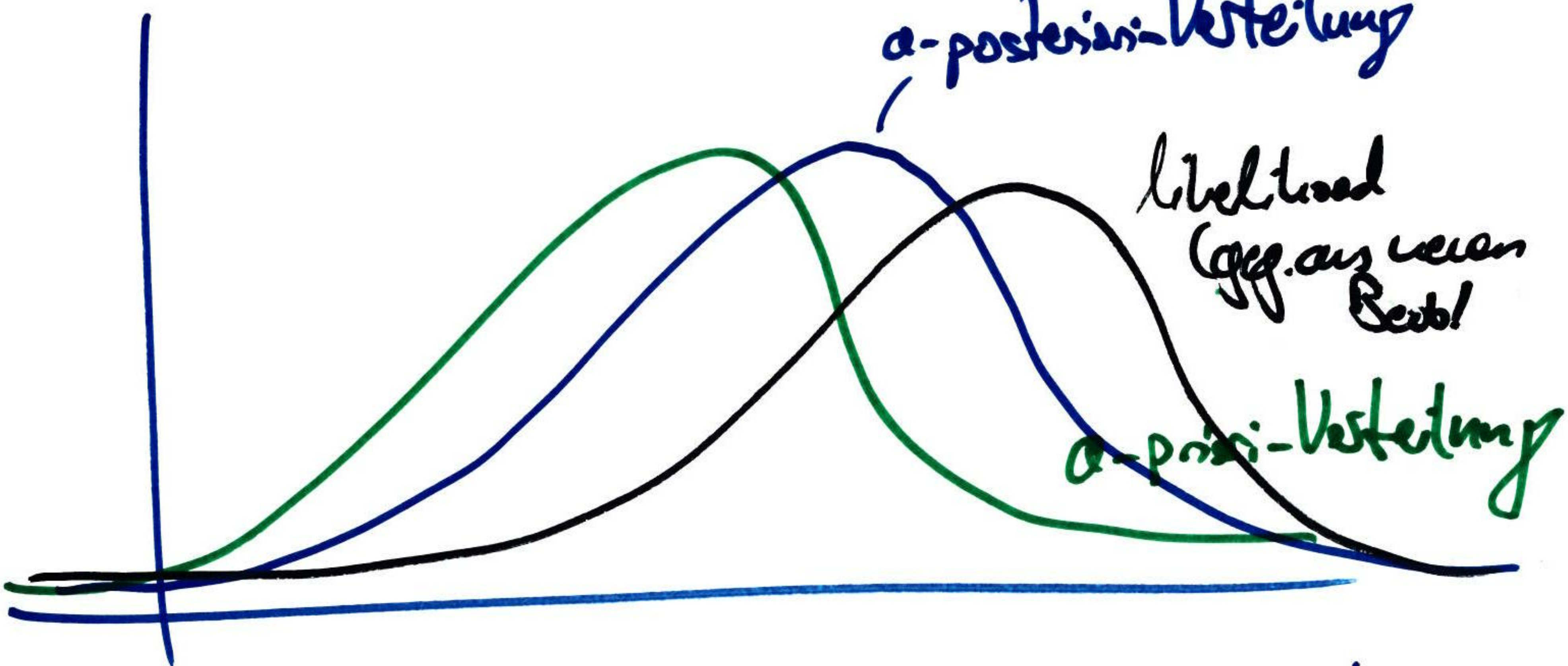
Anwendung 2: Gezinkter Zufall





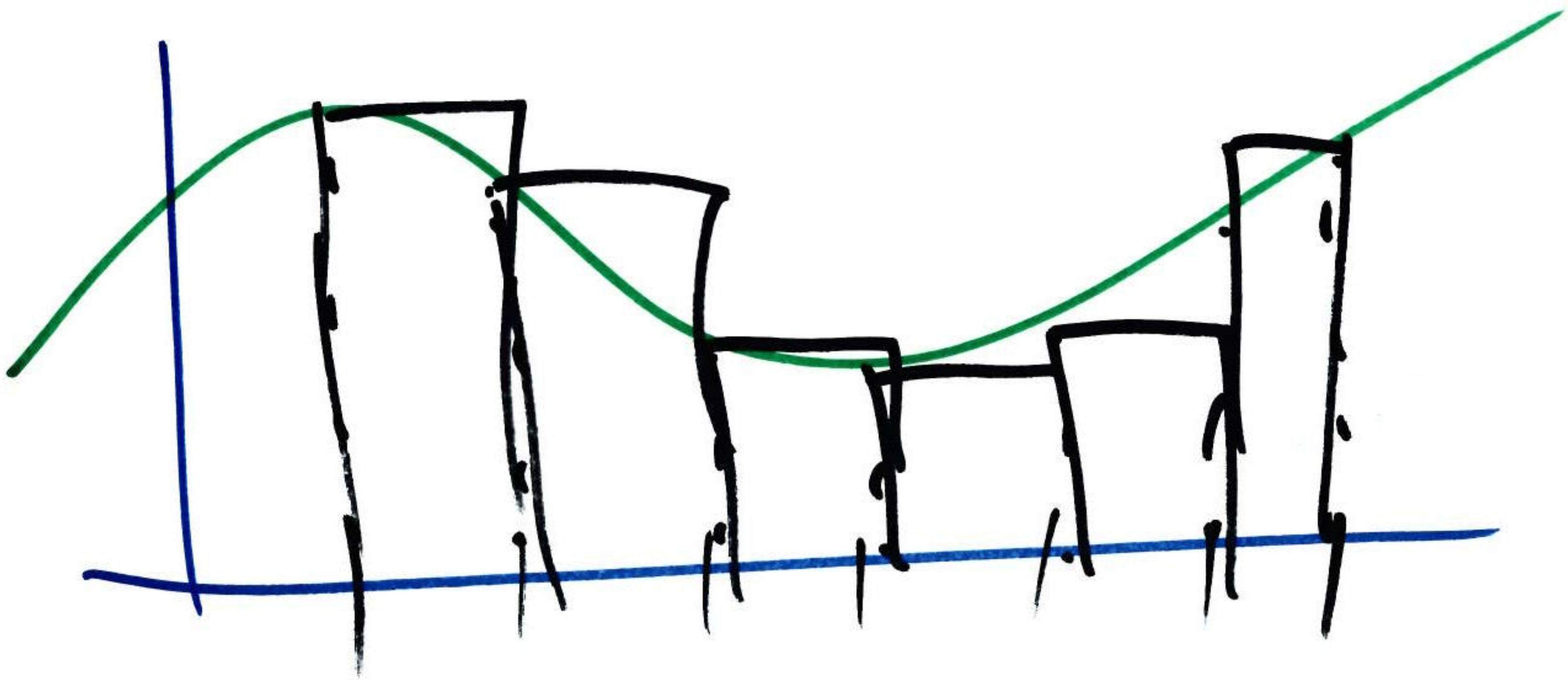
→ Simulation physikalischer Systeme

Anwendung 3: Bayessche Statistik



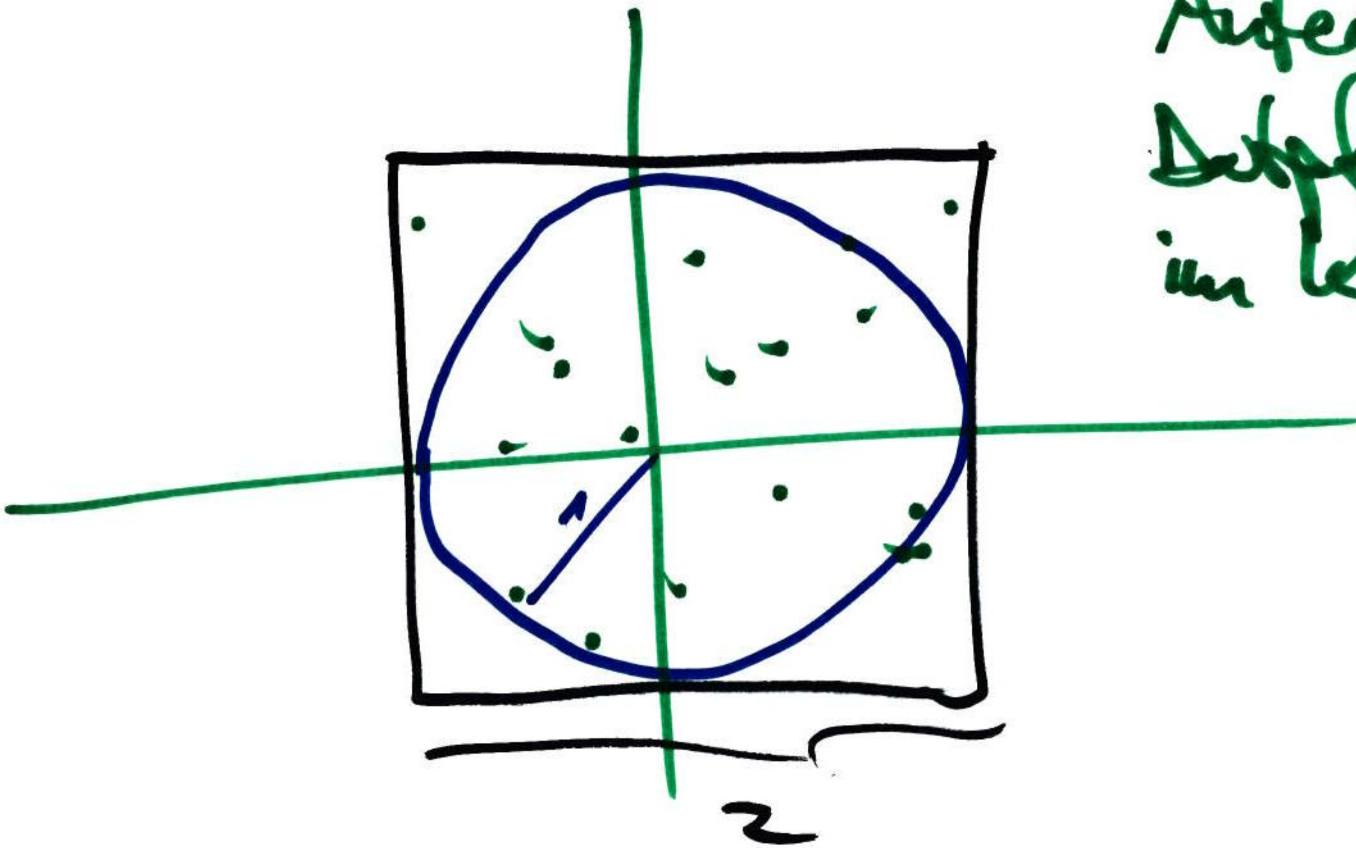
Anwendung 4: (Hochdimensionale) Integrale berechnen

$$\int\int\int\int\int\int \ldots \, da\, db\, dc\, dd\, de\, df$$



Fluch der Dimensionalität

Warmup, wo Zufall hilft:

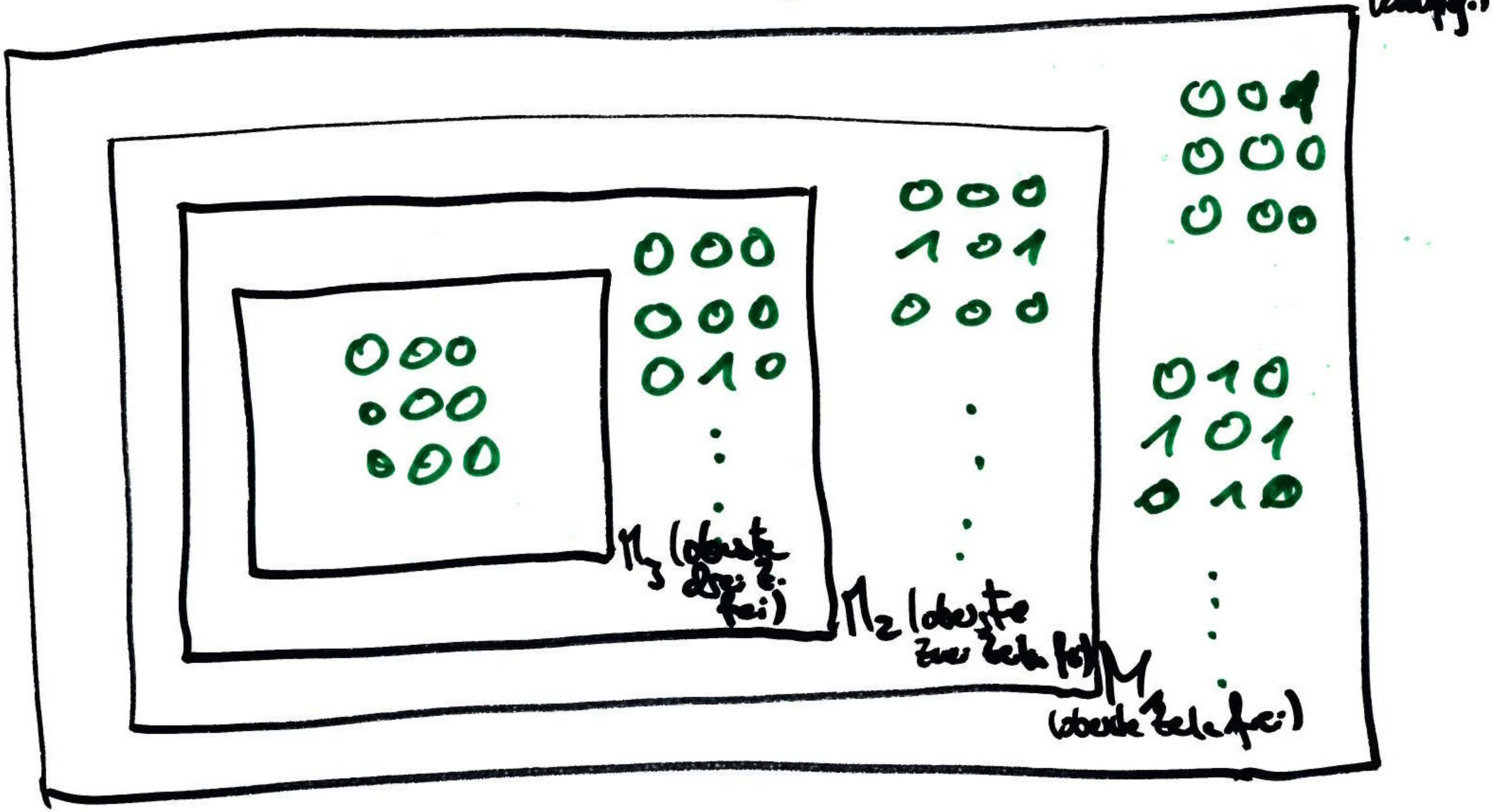


Anteil derjenigen Dartpfeile, die im Kreis landen

$\approx \frac{\pi}{2 \cdot 2}$

Zu ANWENDUNG 1

FILTRIERUNG



$$\frac{1}{|M_0|} = \frac{|M_3|}{|M_2|} \cdot \frac{|M_2|}{|M_1|} \cdot \frac{|M_1|}{|M_0|}$$

$1 = |M_3|$

Anzahl Elemente von M_0

$\frac{|M_1|}{|M_0|}$ = Anteil derjenigen Konf. aus M_0, welche in M_1 liegen

lässt sich durch Simulation näherungsweise bestimmen

bei der Filtrierung darauf achten dass der Anteil „vernünftig" ist (z.B. $> \frac{1}{100}$)

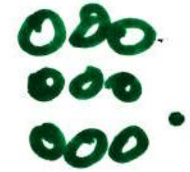
aber auch darauf achten, dass die Anzahl Faktoren niedrig bleibt

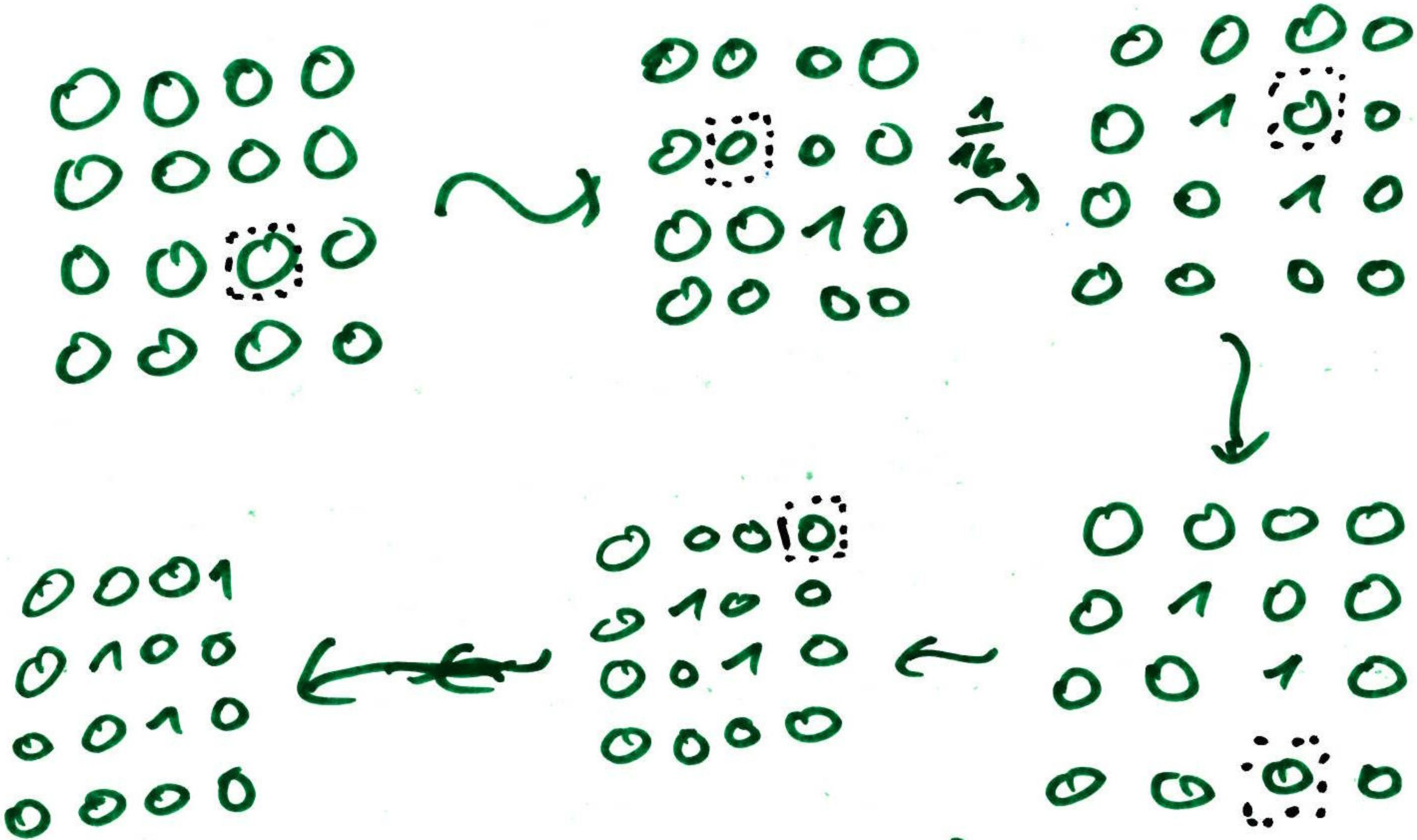
0	1	0	1
0	0		0

Beim „Ziehen mit Prinzip" erhält man zwar nur zulässige Konfigurationen (☺), aber manche Konfigurationen werden bevorzugt und andere benachteiligt (☹).

MCMC-Verfahren, um repräsentative Ziehungen zu erhalten:

keine Bevorzugung oder Benachteiligung

1. Beginne mit irgendeiner zulässigen Konfiguration, z.B. 
2. Wähle zufällig eine Position aus.
3. Falls die Änderung des Status bei dieser Position wieder zu einer zulässigen Konfiguration führt, dann akzeptiere diesen Vorschlag; andernfalls lehne ihn ab.
4. Gib die aktuelle Konfiguration aus.
5. Zurück zu Schritt 2.

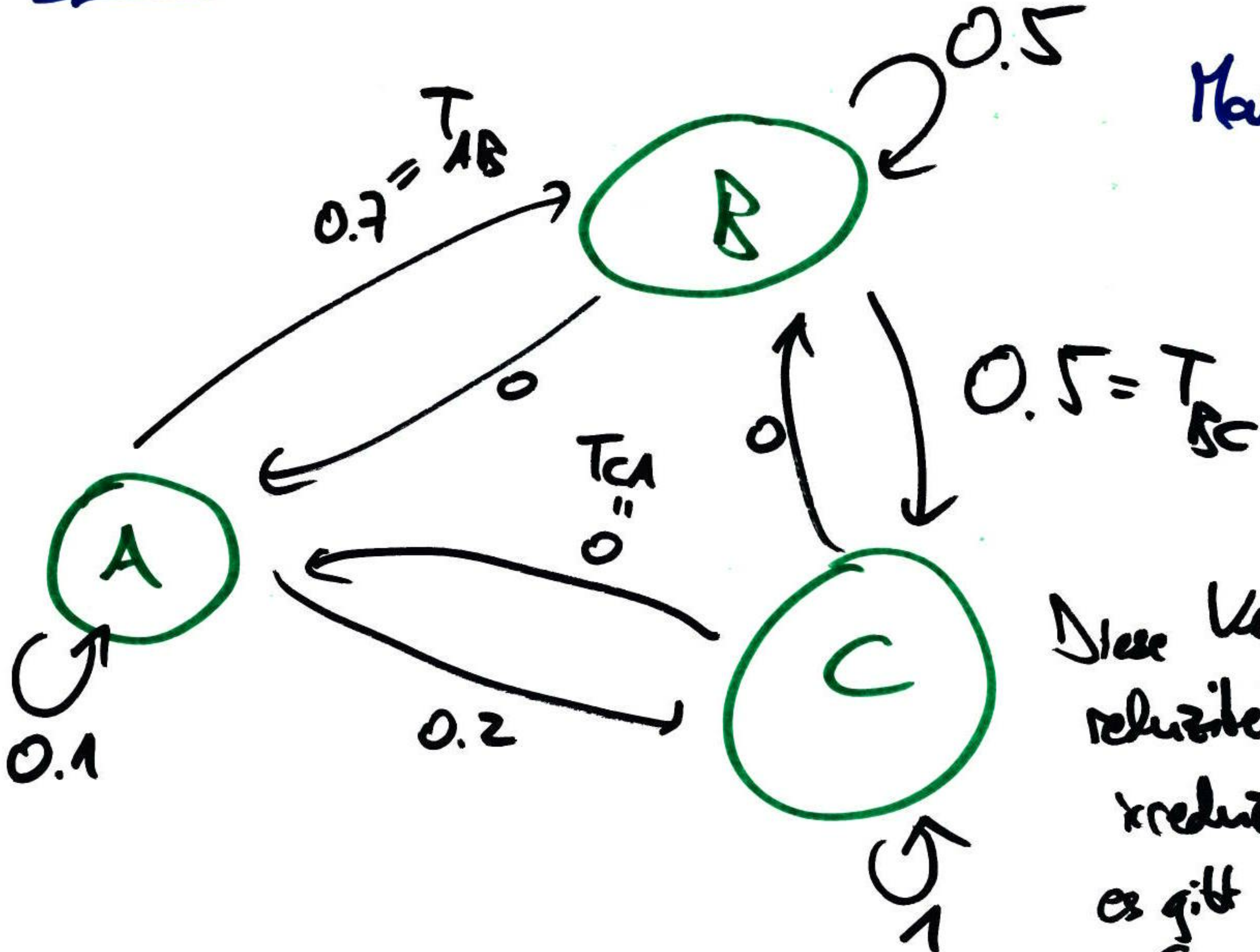


Wieso liefert dieses Verfahren repräsentative Stichproben?

DER ERGODENSATZ

10a

Markovkette



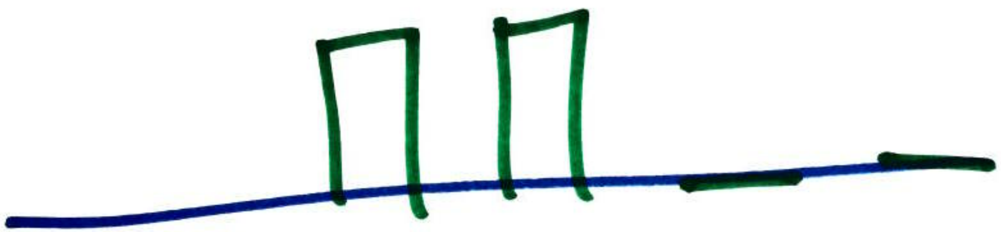
Diese Kette ist reduzibel (nicht irreduzibel), denn es gibt keine Mögl., von C nach A zu wechseln.

WIKIPEDIA-EXPERIMENT

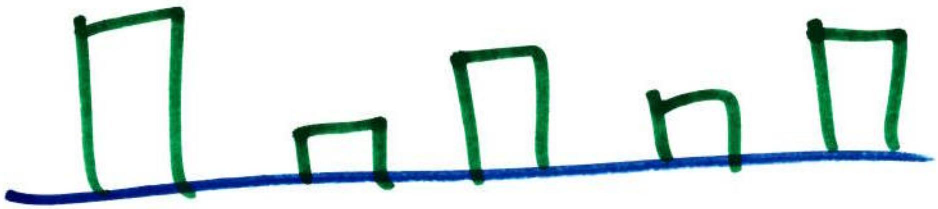
1

Nach einiger Zeit stellt sich eine stationäre Verteilung ein.

2



3



Satz: Sei eine irreduzible und aperiodische Markovkette geg. (12)

Dann gibt es eine <u>stationäre Verteilung</u> $(p_i)_i$ mit:

$$\lim_{n\to\infty} P(\text{im } n\text{-ten Zug liegt Zustand } i \text{ vor, gegeben dass man bei Zug } 0 \text{ mit Zustand } x_0 \text{ begann}) = p_i$$

für alle Wahlen x_0 des Anfangszustands.

Zusatz: Gelte für eine Verteilung $(q_i)_i$ die <u>detaillierte Gleichgewichtsbedingung</u>:

$$q_i \cdot T_{ij} = q_j \cdot T_{ji}$$

Wsk. für den Übergang von Zustand i zu Zustand j

für alle Zustände i, j.

Dann gilt: $p_i = q_i$ für alle Zustände i.

$$q_i = \frac{1}{|M_0|}$$

det. Gl.bed.: $\frac{1}{|M_0|} \cdot T_{ij} \overset{?}{=} \frac{1}{|M_0|} \cdot T_{ji}$

$$\Leftrightarrow \quad T_{ij} = T_{ji}$$

5. Metropolis-Algorithmus
(einer der zehn wichtigsten Algorithmen)