

---

# **Lineare Algebra II**

---

Inoffizieller Mitschrieb

Stand: 1. Mai 2018

*Vorlesung gehalten von:*

Prof. Dr. Amador Martín-Pizarro  
Abteilung für Angewandte Mathematik  
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

# 0. Recap

## Definition 0.1 – RING

Ein (kommutativer) Ring (mit Einselement) ist eine Menge zusammen mit zwei binären Operationen  $+$ ,  $\cdot$ , derart, dass:

- $(R, +)$  ist eine abelsche Gruppe
- $(R, \cdot)$  ist eine kommutative Halbgruppe
- die Distributivgesetze:  
 $a(x + y) = ax + ay$   
 $(x + y)z = xz + yz$

## Definition 0.2 – INTEGRITÄTSBEREICH

Ein Integritätsbereich ist ein Ring ohne Nullteiler. Also  $\forall x, y \in R : x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

## Definition 0.3 – KÖRPER

Ein Körper ist ein Ring der Art, dass

1.  $1 \neq 0$
2.  $\forall x \in K : x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} : xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

*Bemerkung:* Körper sind Integritätsbereiche.

## Definition 0.4 – CHARAKTERISTIK

Sei  $R$  ein nicht trivialer Ring ( $0 \neq 1$ ).  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow R, z \mapsto \begin{cases} \sum_{i=1}^n 1 & n \geq 0 \\ -\sum_{i=1}^n 1 & \text{ansonsten} \end{cases}$

Dann ist  $\varphi$  ein Ringhomomorphismus.

Für den Kern von  $\varphi$  ( $\text{Ker}(\varphi)$ ) gibt es zwei Möglichkeiten.

1.  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}, p = 0$
2.  $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ . Dann gibt es ein kleinstes echt positives Element  $p \in \text{Ker}(\varphi)$ .

$R$  hat dann Charakteristik  $p$  ( $\text{Char}(R) = p$ ). Falls  $R$  ein Integritätsbereich ist, dann ist  $p$  eine Primzahl.

**Beispiele:**

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \dots, \bar{n}\}$  hat Charakteristik  $n$ .

Insbesondere enthält jeder Körper mit Charakteristik  $p$  eine "Kopie" von  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ :

$k$  hat Charakteristik  $p \Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xleftrightarrow{\text{injectiv}} K$ .

Hier ist  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ein Körper:

$a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow$  es ist  $a$  mit  $p$  teilerfremd.  $1 = a \cdot b + p \cdot m \Rightarrow \bar{1} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ .

## Definition 0.5 – POLYNOMRING

Sei  $K$  ein Körper. Der Polynomring  $K[T]$  in einer Variable  $T$  über  $K$  ist die Menge formeller Summen der Form:

$$f = \sum_{i=0}^n a_i \cdot T^i, n \in \mathbb{N}$$

Der Grad von  $f \in K[T]$  ist definiert als:

$$\text{Grad}(f) := \max(m \mid m < n \wedge a_m \neq 0)$$

$$\text{Grad}(0) := -1$$

Falls  $\text{Grad}(f) = n$  und  $n = 1$  heißt das Polynom normiert.

Die Summe und das Produkt von Polynomen sind definiert als:

$$\sum_{i=0}^n a_i T^i + \sum_{j=0}^m b_j T^j := \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k b_k) T^k$$

$$\sum_{i=0}^n a_i T^i \cdot \sum_{j=0}^m b_j T^j := \sum_{k=0}^{n+j} c_k T^k, c_k = \sum_i i + j = k a_i b_j$$

*Bemerkung:*  $K[T]$  ist ein Integritätsbereich.

### Korollar 0.6

Es seien  $f, g$  beide  $\neq 0$

$$\Rightarrow \text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g) \Rightarrow f \cdot g \neq 0$$

$$\text{Grad}(f + g) \leq \max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g))$$

### Satz 0.7 – DIVISION MIT REST

Gegeben  $f, g \in K[T]$ ,  $\text{Grad}(g) > 0$ . Dann existieren eindeutige Polynome  $q, r$ , so dass  $f = gq + r$ , wobei  $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(g)$ .

**Beweis:** Eindeutigkeit: Angenommen  $f = g \cdot q + r = g \cdot q' + r', q \neq q' \vee r \neq r'$ .

$$\Rightarrow g(q-q') = r'-r \Rightarrow \text{Grad}(r'-r) = \max(\text{Grad}(r'), \text{Grad}(r)) < \text{Grad}(g) = \text{Grad}(g(q-q')) \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

$\Rightarrow q = q' \Rightarrow r = r'$  Existenz: Induktion auf  $\text{Grad}(f)$

$$\text{Grad}(f) = 0 \Rightarrow f = g \cdot 0 + f$$

$$\text{Grad}(f) = n+1$$

$$\text{Grad}(f) < \text{Grad}(g) = m \Rightarrow f = g \cdot 0 + f$$

OBdA.  $n+1 = \text{Grad}(f) \geq \text{Grad}(g) = m > 0$

$$f = a_{n+1} \cdot T^{n+1} + \hat{f}, \text{Grad}(\hat{f}) \leq n, a_{n+1} \neq 0$$

$$\text{Sei } f' = f - b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} \cdot g \Rightarrow \text{Grad}(f') \leq n \text{ Ia: } f' = g \cdot q' + r', \text{Grad}(r') < \text{Grad}(g)$$

$$f' = f - b - b^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} \cdot g \Rightarrow f = g(b_n^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} + q') + r' \Rightarrow \text{Grad}(r') < \text{Grad}(g) \quad \square$$

### Definition 0.8 – POLYNOM TEILT

$$f, g, q \in K[T], \text{Grad}(g) > 0$$

$$g \text{ teilt } f = g|_f \Leftrightarrow f = g \cdot q$$

### Definition 0.9 – NULLSTELLEN VON POLYNOMEN

$f \in K[T]$  besitzt eine Nullstelle  $\lambda \in K$  gdw.  $(T - \lambda)|_f \Leftrightarrow f(\lambda) = 0$ .

f lässt sich dann schreiben als  $f = (T - \lambda)q + r$ .

### Lemma 0.10

$$f \in K[t], f \neq 0, \text{Grad}(f) = n \Rightarrow f \text{ besitzt höchstens } n \text{ Nullstellen in } k.$$

**Beweis:**

$$n = 0 \Rightarrow f = a_0, a_0 \neq 0$$

$n > 0$  Falls  $f$  keine Nullstellen in  $K$  besitzt  $\Rightarrow$  ok!

Sonst, sei  $\lambda \in K$  eine Nullstelle von  $f$ .  $f = (T - \lambda) \cdot g$ ,  $\text{Grad}(g) = n - 1 < n$

I.A besitzt  $g$  höchstens  $n - 1$  Nullstellen. Jede Nullstelle von  $f$  ist entweder  $\lambda$  oder eine Nullstelle von  $g$ .  $\Rightarrow f$  hat höchstens  $n$  Nullstellen.

□

### Definition 0.11 – VIELFACHHEIT EINER NULLSTELLE

$f \in K[T], f \neq 0, \lambda \in K$  Nullstelle von  $f \Rightarrow f = (T - \lambda)^{K_\lambda} \cdot g, g(\lambda \neq 0)$ .  $K_\lambda$  ist die Vielfacheit der Nullstelle  $\lambda$  in  $f$ .

### Definition 0.12

Ein Körper heißt algebraisch abgeschlossen, falls jedes Polynom über  $K$  positiven Grades eine Nullstelle besitzt.

**Beispiele** Ist  $\mathbb{R}$  algebraisch abgeschlossen? Nein:  $T^2 + 1$ .

Bem.:  $\mathbb{C}$  ist algebraisch abgeschlossen.

*Bemerkung:* Jeder algebraisch abgeschlossene Körper muss unendlich sein. Sei  $K = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, f = (T - \lambda_1), \dots, (T - \lambda_n) + 1$ .

### Lemma 0.13

$K$  ist genau dann algebraisch abgeschlossen, wenn jedes Polynom positiven Grades in lineare Faktoren zerfällt.

$$f = T(\lambda_1) \dots (T - \lambda_n).$$

**Beweis:**

$\Leftarrow$  trivial

$$\Rightarrow \text{Grad}(f) = n > 0 \Rightarrow f = (T - \lambda_1) \cdot g, \text{Grad}(g) \leq n - 1 < n \stackrel{I.A.}{\Rightarrow} f = c(T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$$

□

### Definition 0.14 – VEKTORRAUM

Vektorraum  $V$  über  $K$  ist eine abelsche Gruppe  $(V, +, 0_V)$  zusammen mit einer Verknüpfung  $K \times V \rightarrow V$   $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$  die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.  $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
2.  $\lambda(\mu(v)) = (\lambda\mu)v$
3.  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
4.  $1_K v = v$

### Definition 0.15 – UNTERVEKTORRAUM

Ein Untervektorraum  $U \subset V$  ist eine Untergruppe, welche unter der Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

*Bemerkung:*  $\{U_i\}_{i \in I}$  Untervektorräume von  $V \Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i$  ist Untervektorraum. Insb. gebenen  $M \subset V$  existiert  $\text{span}(M) = \langle M \rangle =$  der kleinste Unterraum von  $V$ , der  $M$  enthält.

$$\text{span}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i, m_i \in M, \lambda_i \in K, n \in \mathbb{N}$$

$M$  ist ein Erzeugendensystem für  $\text{span}(M)$

Außerdem gilt:

$$\sum_{i \in I} U_i = \text{span}(\bigcup_{i \in I} U_i)$$

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow \text{span}(M_1) \subset \text{span}(M_2)$$

### Definition 0.16 – LINEARE UNABHÄNGIGKEIT

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Dann gilt  $v_1, \dots, v_n$  sind linear unabhängig falls  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : \sum \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$   $M \subset V$  ist linear unabhängig, falls jede endliche Teilmenge von  $M$  linear unabhängig ist. Äquivalent dazu ist:  $M$  ist linear unabhängig, falls kein Element von  $M$  sich als Linearkombination der anderen schreiben lässt.

### Definition 0.17 – BASIS

Sei  $B = \{v_1, \dots, v_n\}, v_i \in V$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent und definieren eine Basis:

1.  $B$  ist ein lineare unabhängiges Erzeugendensystem von  $V$
2. Jedes Element von  $V$  lässt sich eindeutig als Linearkombination der Elemente in  $B$  schreiben.
3.  $B$  ist ein minimales Erzeugendensystem.
4.  $B$  ist maximal lineare unabhängig.

### Satz 0.18 – BASISERGÄNZUNGSSATZ

Sei  $M \subset V$  lineare unabhängig, dann gilt  $\exists B \subset V$ , und  $B$  ist eine Basis welche  $M$  entält. Insbesondere hat jeder Vektorraum eine Basis. „Je zwei Basen sind in Bijektion“.

### Definition 0.19 – DIMENSION

$V$  ist endlichdimensional, falls  $V$  eine endliche Basis besitzt. Sonst ist  $V$  unendlichdimensional. Fall  $V$  endlichdimensional ist, ist die Dimension von  $V$  definiert durch:

$$\dim(V) = |B| \text{ mit } B \text{ beliebige Basis.}$$

### Satz 0.20 – BASISAUSWAHLSATZ

Sei  $M \subset V$  ein Erzeugendensystem von  $V$ , dann gilt  $\exists B \subset M$  mit  $B$  ist eine Basis von  $V$ .

### Lemma 0.21

Sei  $U \subset V$  ein Unterraum, dann gilt  $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(U) < \infty$

### Lemma 0.22

Die Dimension ist modular:  $\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$

### Definition 0.23 – DIREKTES PRODUKT VON VEKTORRÄUMEN

$$V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow V = U_1 + U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$V = \bigoplus_{i \in I} U_i \Leftrightarrow V = \sum_{i \in I} U_i \text{ und die Familie ist transversal: } \{U_i\}_{i \in I} \rightarrow U_i \cap (\sum_{j \in I} U_j) = \{0\}$$

### Definition 0.24 – KOMPLEMENTÄR

Sei  $U \subset V$  ein Untervektorraum, dann gilt  $\exists \hat{U} \subset V : V = U \oplus \hat{U}$ .

$\hat{U}$  heißt dann Komplementär zu  $U$ .

### Beispiele

$K^2$  ist ein K-VR.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist eine Basis.

$U = \text{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ .  $K^2 = U \oplus \text{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ .  $K^2 = U \oplus \text{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ .

### Definition 0.25 – LINEARE ABBILDUNGEN

$F : V \rightarrow W$  ist linear, falls gilt:  $F(\lambda v + \mu u) = \lambda F(v) + \mu F(u)$

### Definition 0.26 – KERN UND BILD

$\text{Ker}(F) = \{v \in V | F(v) = 0\}$

$\text{Im}(F) = \{w \in W | \exists v \in V : F(V) = w\}$

$\text{Ker}(F)$  ist ein Untervektorraum von  $V$ ,  $\text{Im}(F)$  ist ein Untervektorraum von  $W$ .

### Lemma 0.27

Falls  $B$  eine Basis von  $V$  ist, ist  $F(B)$  ein Erzeugendensystem von  $\text{Im}(F)$ .  $F$  ist injektiv genau dann wenn  $\text{Ker}(F) = \{0\}$ .

### Lemma 0.28

$V$  endlichdimensional:  $\dim(V) = \dim(\text{Ker}(F)) + \dim(\text{Im}(F))$ .

$V/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(F)$ .

Bemerkung:  $V, W$  endlichdimensional,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$   $V \cong K^n$ ,  $v_i \mapsto e_i$ .

### Definition 0.29 – MATRIX

Sei  $F : V \rightarrow W$ ,  $\dim(V) = n$ ,  $\dim(W) = m$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ ,  $\{w_1, \dots, w_m\}$  Basis von  $W$ .

$K^n \cong V \xrightarrow{F} W \cong K^m$ . Dadurch wird durch  $F$  und die beiden Basen eine Abbildung von  $K^n$  nach  $K^m$  definiert. Diese Abbildung kann durch eine Matrix  $A$  dargestellt werden.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} \lambda_1, \dots, \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

$$F(v_1), \dots, F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ist die  $m \times n$  Matrix  $A$ .

### Definition 0.30 – RANG EINER MATRIX

$Rg(A) = \dim(\text{span}(\text{Spaltenvektoren})) = \dim(\text{span}(\text{Zeilenvektoren}))$

$F : V \rightarrow W$  linear.  $Rg(F) = Rg(A) = \dim(\text{Im}(F))$ , mit  $A$  eine beliebige darstellende Matrix von  $F$ .

### Satz 0.31 – NORMALFORM

Es seien  $V, W$  endlichdimensional. Dann existieren Basen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ ,  $\{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$ , so dass

die darstellende Matrix von  $F$  der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

**Beweis:** Sei  $U = \text{Ker}(F)$  und  $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $U$ . Sei  $U'$  ein Komplement von  $U$  in  $V$   $\Rightarrow V = U \oplus U'$ . Sei  $\{v_1, \dots, v_r\}$  eine Basis von  $U'$ .  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  ist eine Basis von  $V$ .  $\text{Im}(F)$  hat  $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$  als Basis.

$\sum_{i=1}^n \lambda_i F(v_i) = 0 \Rightarrow F(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in U \wedge \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in U' \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Ergänze  $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$  zu einer Basis  $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$ .  $F(v_1), \dots, F(v_r), F(v_{r+1}), \dots, F(v_n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

□

### Definition 0.32 – INVERTIERBARKEIT VON MATRIZEN

$A \in M_{n \times n}(K)$  ist invertierbar, falls es eine Matrix  $B \in M_{n \times n}(K)$  gibt, so dass  $A \cdot B = B \cdot A = Id_n$ .  $B$  wird dann als  $A^{-1}$  bezeichnet.

$GL(n, k) = Gl_n(K) = \{A \in M_{n \times n}(K) \text{ invertierbar}\}$  ist eine Gruppe.

$A \in GL_k(n) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$  (Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie regulär ist).

*Bemerkung:* Sei  $A$  regulär. Dann besitzt ein Gleichungssystem der Form  $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  die Eindeutige

Lösung,  $A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ .

*Bemerkung:*  $A$  ist regulär genau dann wenn  $A$  sich durch elementare Zeilenoperationen in  $Id_n$  überführen lässt.

$E_{i,j}$  sei die Matrix, die an der Stelle  $ij$  1 ist, ansonsten 0.

Elementare Zeilenoperationen sind:

Multiplikation der Zeile  $i$  mit  $\lambda$ :  $Id_n + (\lambda - 1)E_{i,j}$ .

Addieren von  $\lambda$  mal der iten Zeile zur jten:  $Id_n + \lambda E_{i,j}$ .

Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile:  $Id_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{j,i} + E_{i,j}$

*Bemerkung:* Das inverse einer Matrix lässt sich durch nutzen dieser elementaren Zeilenoperationen nach z.B. dem Gauß-Jordan Verfahren errechnen:

$$\left( \begin{array}{c|c} A & Id_n \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Zeilenoperationen}} \left( \begin{array}{c|c} Id_n & A^{-1} \end{array} \right)$$

Die linke Hälfte der Ergebnismatrix enthält dann  $A^{-1}$ , denn:

$$B_m \dots B_2 B_1 A = Id_n \Rightarrow B_m \dots B_1 = A^{-1}$$

### Definition 0.33 – ÜBERGANGSMATRIZEN

Es sei  $\dim(V) = n$  und  $\{v_1, \dots, v_n\}, \{v'_1, \dots, v'_n\}$  Basen von  $V$ . Weiterhin sei  $F : V \rightarrow V, v_i \mapsto v'_i$ . Dann gilt:

$$v'_i = \sum_{ij} s_{ij} v_j \text{ und die darstellende Matrix } S \text{ von } F, S = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nm} \end{pmatrix} \text{ ist regulär.}$$

### Definition 0.34

Zwei ( $m \times n$ ) Matrizen  $A, A'$  sind äquivalent, falls es reguläre Matrizen  $T \in GL_m(K), s \in GL_n(K)$  gibt, so dass  $A' = T^{-1} \cdot A \cdot S$ .

$A, A' \in M_{n \times n}(K)$  sind ähnlich, falls es  $S \in GL_n(K)$  gibt, so dass  $A' = s^{-1} \cdot A \cdot S$ .

Bemerkung: Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf  $M_{n \times n}(K)$ .

### Definition 0.35 – DETERMINANTE

$\det K^n \rightarrow K$  ist eine multilinear alternierende Abbildung der Art, dass  $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

$A \in M_{n \times n}(K)$

$A = (a_1 | a_2 | \dots | a_n) \Rightarrow \det(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det(A)$ .

$A = (a_{ij}), \det(a_{ij}) = \sum \text{sign}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^n a_{\pi(i)i}$  mit  $\text{sign}(\pi) = -1^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \pi}$  bzw. Anzahl von Faktoren von  $\pi$  als Produkt von Transpositionen.

Eigenschaften von Determinanten:

1.  $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$
2.  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det(A) \neq 0$
3.  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
4.  $\det(A^T) = \det(A)$

Bemerkung:  $Id_n + (-Id_n)$  ist nicht invertierbar, also  $\exists A, B : \det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

### Satz 0.36 – LAPLACESCHER ENTWICKLUNGSSATS

Sei  $j_0$  ein Spaltenindex

$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det(A_{j_0 i})$  wobei  $A_{j_0 i}$  die Matrix ohne Zeile  $j_0$  und Spalte  $i$  ist.

### Satz 0.37 – CRAMERSCHE REGEL

$$(a_1 | \dots | a_n) = A, A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ Falls } A \text{ regulär ist, gibt es eine einzige Lösung zum System: } \lambda_j = \frac{\det(a_1, \dots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \dots, a_n)}{\det(A)}$$

### Definition 0.38 – DETERMINANTE EINES HOMOMORPHISMUS

Sei  $F : V \rightarrow V$ .  $\det(F) = \det(A)$  wo  $A$  eine Darstellungsmatrix von  $F$  bezgl. einer Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

### Definition 0.39 – ADJUNTE MATRIX

Sei  $A$  eine  $n \times n$  Matrix, dann ist die Adjunte von  $A$

$$\text{adj}(A) = (\gamma_{ij}) \text{ mit } \gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Bemerkung: Sei  $c_i$  die j-te Zeile von  $\text{adj}(A)$ . Sei weiterhin  $a_i$  die i-te Spalte von A.

$$\gamma_{j1}, \dots, \gamma_{jn} \cdot \begin{pmatrix} a_{1i} \\ vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+n} a_{ki} \det(A_{jk}) \stackrel{\text{Laplacescher Entw. Satz}}{=} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n) = \begin{cases} \det(A) & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

Angenommen A ist regulär.

$$\text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot Id_n \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A) \cdot A} = Id_n = A^{-1} \cdot A \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = A^{-1} \Rightarrow A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) Id_n$$

## 0.1 Diagonalisierbarkeit

Sei V ein Vektorraum,  $\{U_i\}_{i=1}^k$  Unterräume von V.

$$V = \bigoplus_{i=1}^k U_i \Leftrightarrow V = \sum_{i=1}^n U_i \wedge U_i \cap (\sum_{j=1}^k U_j) = 0$$

Äquivalent dazu ist, dass jeder Vektor  $v \in V$  sich eindeutig als Linearkombination von Vektoren  $\cup_{j=1}^k B_j$  schreiben lässt, wo bei  $B_j$  eine Basis von  $U_i$  ist.

### Definition 0.40 – Eigenwerte und -vektoren

Ein Endomorphismus  $F : V \rightarrow V$  besitzt einen Eigenvektor, falls es ein  $v \in V \setminus \{0\}$ , so dass  $F(V)\lambda \cdot v$  für ein  $\lambda \in K$ . Falls  $F(v) = \lambda v$  ist  $\lambda$  eindeutig bestimmt durch F und v.  $\lambda$  ist dann ein Eigenwert von F.

### Definition 0.41 – Eigenräume

$\lambda \in K, FV \rightarrow V$  Endomorphismus.

$V(\lambda) = \{v \in V | F(v) = \lambda v\}$ , der Eigenspace zu  $\lambda$  ist ein UVR.

Bemerkung:  $\lambda$  ist ein Eigenwert von F gdw.  $\dim(V(\lambda)) \geq 1$ .

Bemerkung: Falls  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  verschiedene Eigenwerte von F  $\Rightarrow V(\lambda_i) \cap \sum_{j=1, j \neq i}^k V(\lambda_j) = \{0\}$

### Definition 0.42 – Diagonalisierbarkeit

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum.  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus. Bzw. eine Matrix  $A : K^n \rightarrow K^n$ .

F ist diagonalisierbar, falls  $V = \bigoplus_{i=1}^k V('lb)$ ,  $\lambda$  verschiedene Eigenwerte von F.

Äquivalent dazu, wenn V eine Basis von Eigenwerten von F besitzt. Äquivalent dazu, wenn F bezüglich

einer Basis von V die Darstellungsmatrix  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  hat.

Äquivalenz dazu, für Matrizen: A ist diagonalisierbar gdw. es eine reguläre Matrix S gibt, sodaß  $S^{-1}AS =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

### Satz 0.43

$A \in M_{n \times n}(K), \lambda \in K$

$\lambda$  ist ein Eigenwert von A gdw.  $\lambda Id_n - A$  nicht regulär ist.  $\Leftrightarrow \det(\lambda \cdot Id_n - A) = 0$

### Definition 0.44 – Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom einer Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$  ist  $\xi_{A(T)} = \det(T \cdot Id_n - A)$

Bemerkung:  $\lambda$  ist ein Eigenwert von A  $\Leftrightarrow \xi_A(\lambda) = 0$

**Beispiel**  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xi_{A(T)} = T^2 + 1 = \det\left(\begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & T \end{pmatrix}\right)$$

*Bemerkung:* A und A' ähnlich,  $A' = s^{-1}AS \Rightarrow \xi_A(T) = \xi_{A'}(T)$ . Insbesondere können wir über das charakteristische Polynom eines Endomorphismus reden.

$$A \in M_{n \times n}(K), \xi_A(T) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \cdots + b_0 \text{ wobei } b_0 = (-1)^n \det(A), b_{n-1} = -\text{Tr}(A) = -\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

### Korollar 0.45

Ein Endomorphismus  $F : V \rightarrow V$  mit  $\dim(V) = n < \infty$  kann höchstens n viele Eigenwerte besitzen.

### Korollar 0.46

$F : V \rightarrow V$  mit  $\dim(V) = n < \infty$  mit verschiedenen Eigenwerten  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  ist diagonalisierbar, gdw.  $n = \sum_{i=1}^k d_i, d_i = \dim(V(\lambda_i))$ .  $d_i$  heißt geometrische Vielfachheit von  $\lambda_i$ .

**Beweis:**

$\Rightarrow$

F ist diag. gdw. V eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, welche aus  $\cup_{i=1}^n B_i$  besteht,  $|B_I| = d_i = \dim(V(\lambda_i))$ ,  $n = |B| = \sum_{i=1}^k |B_i|$

$\Leftarrow$

$n = \sum d_i \Rightarrow \dim(\sum_{i=1}^k (V(\lambda_i))) = n \Rightarrow V = \sum_{i=1}^k (V(lb_i))$  da die Eigenräume transversal sind, und ein Vektorraum nur einen UVR der Dimension  $\dim(V)$  hat, sich selbst.  $\square$

### Definition 0.47 – ALGEBRAISCHE VIELFACHHEIT

Es seien  $F : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus,  $\dim(V) = n < \infty, \lambda \in K$  Eigenwert  $\Rightarrow \xi_F(\lambda) = 0$ .

Dann gilt  $\xi_F(T) = (T - \lambda)^K G(T), G(\lambda) \neq 0$ . k ist die algebraische Vielfachheit von  $\lambda$ , bzw.  $\text{ord}_\lambda(F)$ .

*Bemerkung:*  $\text{ord}_\lambda(F) \geq \dim(V(\lambda))$

**Beweis:** Sei  $v_1, \dots, v_k$  eine Basis von  $V(\lambda)$ . Wir erweitern sie zu einer Basis  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  von V. Die Darstellungsmatrix M von F bzwg. B ist dann

$\{F(v_1), \dots, F(v_k), F(v_{k+1}), F(v_n)\}.$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \lambda & & C_2 \\ & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Wobei  $C_2 \in Mat_{n-k \times k}(K)$ .

$$\xi_F(T) = \det(TId_n - M) = (T - \lambda)^k \cdot \det(TId_{n-k} \cdot C_1)$$

$\Rightarrow \text{ord}_\lambda(F) \geq K$ . Wobei  $\det(TId_{n-k} \cdot C_1) = 0$  sein kann.  $\square$

### Lemma 0.48

Sei V endlichdimensional,  $F : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus, U ein F-Invarianter Unterraum ( $F(U) \subset U$ ).

$F' : V/U \rightarrow V/U$  ist eine lineare Abbildung,  $\bar{V} \mapsto F(\bar{V})$ .  $F'$  ist wohldefiniert, linear und es gilt  $\xi_{F'|_U}(T) = \xi_{F|_U}(T) \cdot \xi_{F'}(T)$

**Beweis:**

$F'$  ist wohldefiniert;

$$\bar{v}_1 = \bar{v} \xrightarrow{\text{Z2}} F'(v_1) = F(v) \quad \bar{v}_1 = \bar{v} \Rightarrow v_1 = v + (v_1 - v), v_1 - v \in U$$

$$\Rightarrow F(v_1) = F(v) + F(v_1 - v), F(v_1 - v) \in U \Rightarrow F(\bar{v}_1) = F(\bar{v})$$

Restklassen sind linear und  $F$  ist linear  $\Rightarrow F'$  ist linear.

Sei  $\{u_1, \dots, u_k\}$  eine Basis von  $U$ . erweitert zu  $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  sei sie eine Basis von  $V$ .

*Bemerkung:*  $\{v_{k+1}^-, \dots, v_n^-\}$  ist eine Basis von  $V/U$ . Bew. Einfach.

Darstellungsmatrix  $H$  von  $F$  bzgl.  $B$ :

$$\begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \left( \begin{array}{ccc} A & & C_2 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \text{ mit } A, C_1, C_2 \text{ Matrizen.}$$

$$\begin{aligned} \xi_F(T) &= \det(TId_n - H) = \det(TId_n - \begin{pmatrix} A & C_2 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}) \\ &= \det(\begin{pmatrix} T_id_k - A & -C_2 \\ 0 & T_Id_{n-k} - C_1 \end{pmatrix}) = \det(T_id_k - A) \cot \det(T_E n - k - C_1) \end{aligned}$$

$A$  ist die Darstellungsmatrix von  $F|_U$  bezüglich  $\{u_1, \dots, u_k\} \Rightarrow \det(TId_k - A) = \xi_{F|_U}(T)$

$C_1$  ist die Darstellungsmatrix von  $F'$  bzgl.  $\{v_{k+1}^-, \dots, v_n^-\}$ .

$$\Rightarrow \det(T Id_{n-k} - C_1) = \xi_{F'}(T)$$

□

#### Satz 0.49

Sei  $K$  ein Körper,  $\dim(V) < \infty$ ,  $F : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus so gilt:

$F$  Diagonalisierbar gdw  $\xi_F(T) = (T - \lambda_1)^{k_1} \dots (T - \lambda_n)^{k_n}$  in Linearfaktoren zerfällt, wobei für jeden Faktor  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$   $T - \lambda_i$  gilt  $\text{ord}_{lb_i}(F) = \dim(V(\lambda_i))$ .

**Beweis:**

⇒

Sei  $b = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von Eigenvektoren. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die verschiedenen Eigenwerte. Ordne nun  $B$  um so dass

$$v_1, \dots, v_{d_1} \in V(\lambda_1), v_{d_1+1}, \dots, v_{d_1+d_2} \in V(\lambda_2), \dots, v_{d_1+\dots+d_{r-1}}, \dots, v_{d_1+\dots+d_r} \in V(\lambda_r) \text{ mit } d_i = \dim(V(\lambda_i)).$$

Die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $B$ :

$$(F(v_1), \dots, F(v_{d_1}), \dots, F(v_r)) \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_r \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Wobei  $d_i$  viele  $\lambda_i$  auf der Diagonale sind

$\xi_F(T) = \det(T Id_n - A) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots T(-\lambda_r)^{d_r} ((T - \lambda_2)^{d_2} \dots T(-\lambda_r)^{d_r})(\lambda_1) \neq 0 \Rightarrow d_i = \text{ord}_{\lambda_i}(F)$ , da die  $\lambda_i$  verschieden sind.

⇐

$$\xi_F(T) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots (T - \lambda_r)^{d_r}$$

$$F \text{ ist diag} \Leftrightarrow n = \dim(V) = \sum d_i$$

□

**Definition 0.50**

Eine Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$  ist diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Satz 0.51**

$F : V \rightarrow V$  ist diagonalisierbar gdw.  $\xi_F(t)$  in Linearfaktoren zerfällt  $\xi_F(T) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$ .